УДК 624.21.059.1/.21.9.401.7

А. ЛАНТУХ-ЛЯЩЕНКО (НТУ, Киев)

# К ВОПРОСУ О «ПАМЯТИ» МАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ

В статті представлено ймовірнісний підхід до моделювання життєвого циклу елементів автодорожніх мостів. Розглядаються марковські стохастичні моделі деградації. Ці моделі можуть використовуватись як ефективний інструмент оцінки технічного стану і прогнозу залишкового ресурсу. В системі експлуатації мостів ці моделі можуть дати кількісні критерії рівня надійності, ризику і алгоритми прогнозу залишкового ресурсу.

В статье представлен вероятностный поход к моделированию жизненного цикла элементов автодорожных мостов. Рассматриваются марковские стохастические модели деградации. Эти модели могут использоваться как эффективный инструмент оценки технического состояния и прогноза остаточного ресурса. В системе эксплуатации мостов эти модели могут дать количественные оценки уровня надежности, риска и алгоритмы прогноза остаточного ресурса.

This paper presents the application of a probabilistic approach for the modeling of service life of highway bridge elements. The focus of this paper is on the Markov stochastic deterioration models. These models can be used as effective tool for technical state assessments and prediction of residual resource of a structure. For the bridge maintenance purpose these models can give quantitative criteria of a reliability level, risk and prediction algorithms of the residual resource.

## Проблема

Статья посвящена проблеме моделирования стохастического процесса накопления повреждений в элементах строительных конструкций. Эта проблема стала особенно актуальной для Украины в последние 15…20 лет, по мере того, как стремительно растет количество физически устаревших сооружений. В этих условиях, для безаварийной эксплуатации сооружений, нужны новые научные подходы к оценке технического состояния сооружений, которые дали бы количественные критерии уровня надежности, риска и алгоритмы прогноза остаточного ресурса их элементов.

Вопрос о построении модели накопления повреждений в элементах транспортных сооружений есть доминантой глобальной проблемы оценки, прогноза ресурса и безопасной эксплуатации сооружений.

С этой проблемой сталкиваются все страны, но для Украины сегодня проблема становится особо значимой в силу ряда неблагоприятных причин. Среди них тяжелое экономическое и финансовое состояние страны, угрожающее техническое состояние транспортных сооружений, одно из последних мест в Европе по развитию дорожной сети.

В своем предисловии к сборнику «Проблеми ресурсу» [14] академик НАН Украины Б. Е. Патон пишет: «…особую актуальность приобретают вопросы управления эксплуатационной надежностью и долговечностью ответственных объектов путем определения их технического состояния, остаточного ресурса и установления научно обоснованных сроков эксплуатации».

Очевидно, что вопрос построения адекватной модели деградации, позволяющей определить жизненный цикл транспортного сооружения, был и будет предметом внимания многих исследователей. Научные разработки, направленные на получение реалистического прогноза безопасного функционирования сооружения, всегда будут с благодарностью восприниматься обществом в силу большого социально-экономического значения проблемы.

## Модели накопления повреждений

В строительной механике, с 50-х годов прошлого столетия, господствовала модель накопления повреждений известная под названием «теория линейного суммирования повреждений Пальмгрена-Майнера», в которой используется принцип линейной суперпозиции [18, 17]:

$$\sum_{0}^{n} \frac{N_i}{N(\sigma)} = D_i \,, \qquad (1)$$

где $D_i$ – мера повреждений; $N_i$ – число циклов нагружения; $N(\sigma)$ – число циклов до разрушения при режиме напряжений $\sigma$; $n$ – число ступеней изменений режима нагружения.

Предельное число циклов до разрушения $N_R$ определяется из условия $D = 1$ [1, 15]:

$$\int_0^{N_R} \frac{dN}{N_R(\sigma)} = \sum_0^{N_R} \frac{N_i}{N_R(\sigma)} = 1\,. \qquad (2)$$

Эта достаточно простая и прозрачная модель получила широкое распространение в машиностроении. В меньшей степени модель использовалась для оценки жизненного цикла транспортных сооружений. Очевидно, что для использования модели необходимо иметь достоверную оценку количества циклов нагружения, т.е. для прогноза ресурса в процессе эксплуатации необходимо иметь полные данные истории нагружения. Применительно же к мостам, и особенно железобетонным, требуемые данные определяются настолько приблизительно, что теряется достоверность модели. Есть и другие недостатки, сдерживающие применение модели Пальмгрена-Майнера, такие как, например, игнорирование эффектов взаимодействия циклов нагружения с малой и большой амплитудами.

Другое направление построения моделей накопления повреждений элементов строительных конструкций основывается на фундаментальных исследованиях механики разрушения. В Украине это исследования школы академика НАНУ В. В. Панасюка [9, 10, 11, 12], в России – исследования механики железобетонных конструкций [3, 7, 13] и др. Здесь модель разрушения, как правило, строится, используя коэффициенты интенсивности напряжений, представляющие собой физические константы материала [6, 131517]: К сожалению, модели, основанные на классической теории механики разрушения, пока не получили широкого распространения в оценке ресурса элементов транспортных сооружений.

Весомой альтернативой модели (2) стали в последние 30…40 лет феноменологические стохастические модели, описывающие накопление повреждений, как процесс, эволюция которого во времени определяется вероятностными законами. Сейчас многие исследователи склоняются к мысли, что именно стохастические модели марковских цепей есть наиболее перспективным, универсальным интегральным аппаратом описания постепенного разрушения элементов сооружений.

В основе теории марковских процессов лежит следующая гипотеза: результат $(n + 1)$-го события процесса *зависит от результатов всех предшествующих событий* только через результат $n$-го события. В терминах вероятностей эта гипотеза записывается так:

$$\mathrm{Prob}\{k_{n+1} \mid k_1, k_2, ..., k_n\} = \mathrm{Prob}\{k_{n+1} \mid k_n\}\,. \quad (3)$$

Многие называют марковскую цепь процессом «*без памяти*». Сегодня есть немало критиков, оспаривающих практическую ценность марковских моделей накопления повреждений. Критике подвергается основная гипотеза марковской цепи о зависимости «*будущего*» только от «*настоящего*» [4]. В качестве примера такой критики сошлемся на работу [16] видного теоретика США в области ресурса транспортных сооружений,Д. Франгопола (D. Frangopol).

В анализе марковской модели накопления повреждений, изложенном ниже, детально рассматривается вопрос об использовании события $k_n$ для предсказания времени наступления события $k_{n+1}$.

**Марковская модель деградации**

За 100 лет, прошедшие со времени опубликования стохастической теории академика Российской академии наук А. А. Маркова, теория интенсивно развивалась во всем мире и стала базой не только для моделей накопления повреждений, но и во всех отраслях знаний – от управления экономикой до медицинских прогнозов. Стохастические феноменологические модели накопления и прогноза повреждений, рассматриваемые здесь, также базируются на теории марковских цепей.

Износ элемента сооружения здесь описывается *марковским дискретным процессом с непрерывным временем* [1]. Рассматривается процесс с качественными состояниями. Роль случайной переменной здесь играет случайное дискретное состояние системы.

Будем полагать, что элемент находиться последовательно в состояниях $S_1, S_2, ..., S_n$, а переходы из одного дискретного состояния в другое осуществляются в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_{n-1}$.

Моделирование марковским процессом означает, что для произвольного времени $t_0$ вероятность пребывания в каждом из состояний элемента в будущем (при $t > t_0$) зависит только от его состояния в настоящем (при $t = t_0$) и не зависит от того, как и за какое время он достиг текущего состояния.

Таким образом, формально создается впечатление, что прогнозируемое состояние не зависит от истории накопления повреждений. В действительности это не так. Речь не идет о полной независимости «*будущего*» от «*прошлого*», ибо в общем случае, отправное, настоящее состояние (при $t = t_0$) зависит от того, как протекал процесс деградации в прошлом.

В нашей модели определяющие зависимости получены, следуя графу в которых блуждание по дискретным состояниям осуществляется только в одном направлении: от состояния с меньшим, к состоянию большим номером.

В терминах дискретного марковского процесса задача сводится к поиску безусловных вероятностей пребывания системы $S$ на произвольном шаге $k$ в состоянии $S_i$ :

$$p_i(k) = \mathrm{Prob}\left[S(k) = S_i\right]; \quad k = 1, 2, ..., n; \\ i = 0, 1, ..., n-1. \qquad (4)$$

Вероятности $p_i(k)$ выражаются через *условные вероятности* перехода системы $S$ на шаге $k$ в состояние $S_j$ при условии, что на шаге ($k-1$) она была в состоянии $S_i$ :

$$p_{ij}(k) = \mathrm{Prob}\left[S(k) = S_i \mid S(k-1) = S_i\right]; \\ i, j = 0, 1, ..., n-1 . \qquad (5)$$

Условные вероятности перехода $p_{ij}(k)$ образуют стохастическую матрицу $\mathbf{P_0}$. Когда матрица $\mathbf{P_0}$ найдена, по известным значениями условных вероятностей перехода и начальному значению безусловной вероятности пребывания системы в состоянии $S_1$ все другие безусловные вероятности находятся по рекуррентной формуле:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^{n} p_i(k-1) p_{ij} ; \\ k = 1, 2, ..., n; \;\; j = 1, 2, ..., n . \qquad (6)$$

Здесь $n$ – количество рассматриваемых дискретных состояний.

Искомые вероятности марковской цепи $p_1(t)$, $p_2(t)$, ..., $p_n(t)$ – функции времени – являются вероятностями того, что система в момент $t$ находится в состоянии $S_i$., и определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными, в общем случае, коэффициентами. Это известные уравнения Колмогорова-Чепмена, описывающие эволюцию дискретного марковского процесса с непрерывным временем.

В матричной форме уравнения имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{P}(i,t)}{dt} = \mathbf{P}(i,t) \cdot \mathbf{E} , \qquad (7)$$

где $\mathbf{P}(i, t)$ – матрица вероятностей перехода.

К уравнению (7), присоединяются начальные условия:

$$\text{при } t = 0; \; p_1(t) = 1; \; p_2(t) = p_3(t) = p_4(t) = 0 . \qquad (8)$$

Кроме того, в решении системы дифференциальных уравнений (7) можно использовать условие нормирования:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1 , \qquad (9)$$

являющееся следствием того, что события марковской цепи несовместимые и образуют полную группу.

Матрица вероятностей перехода $\mathbf{P}(i, t)$ в (7), очевидно, зависит от времени $t$. Подчеркнем, что время отсчитывается от начала процесса. Что касается матрицы интенсивности переходов (скоростей деградации) $\mathbf{E}$ – то она, в общем случае, также является зависимой от времени. Однако, пригодные для практического применения модели получают с независимой от времени матрицей $\mathbf{E}$ и даже в случаях $\mathbf{E}$ = const [1, 2].

## Модель деградации для случая пяти дискретных состояний

Модель представлена процессом, граф которого показан на рис.1. Это дискретный процесс из 5 состояний с непрерывным временем, равномерно распределенным между состояниями. Система может последовательно переходить из одного соседнего состояния в другой с большим номером, оставаться в каком-либо из них. Состояние 5 – поглощающее. Это означает, что выхода из состояния 5 система не имеет.

Решение системы уравнений (7) при граничных условиях (8), для $n$ = 5 дает матрицу вероятностей переходов системы из состояния $S_1$ в состояния $k$ = 2, 3, 4, 5.

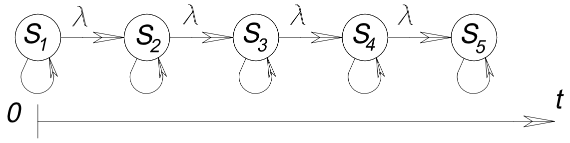


Рис. 1. Граф процесса модели из пяти дискретных состояний

Надежность элемента в состоянии $k$ вычисляется по формуле (6) как безусловная вероятность того, что в момент времени $t$ элемент выйдет из текущего состояния, т.е. произойдет отказ ($k$ + 1).

После того, как определены надежности в каждом из дискретных состояний $k = 2, 3, 4, 5$ – модель жизненного цикла элемента описывается как процесс Пуассона с дискретными состояниями и непрерывным временем. Это частный случай марковского процесса, дающий возможность описать модель нелинейным уравнением – экспоненциальной функцией времени.

Интегральная функция распределения $P(t)$ для времени $T_n$, которое пройдет, пока состоятся все $n$ событий процесса, имеет вид:

$$P(t) = 1 - P(T_n > t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad (10)$$

где $P(t)$ – вероятность того, что элемент перейдет в состояние $k$ в течение времени $t < T_n$; $\lambda$ – параметр процесса – интенсивность отказов.

Из функции (10) при $k = 5$ модель жизненного цикла элемента описывается уравнением:

$$P_t = 1 - 0{,}0083\left(\lambda t\right)^5 e^{-\lambda t}. \quad (11)$$

Таким образом, зависимостью (11), при *заданной интенсивности отказов* $\lambda$, устанавливается связь между надежностью элемента $P_t$ в $i$-м дискретном состоянии и временем $t$, которое прошло от начала эксплуатации до состояния $i = 2, 3, 4, 5$.

### Определение параметра деградации

Как следует из зависимости (11), единственным параметром управления жизненным циклом является интенсивность отказов $\lambda$. В нашей модели этот параметр определяется решением уравнения (11) при известных начальных условиях [8], определенных для отдельного элемента, находящегося в $i$-м состояния ($i \geq 2$):

- надежности элемента в $i$-м дискретном состоянии $P_1(t_1)$, определенной по результатам обследования (определения дискретного состояния, другими словами);
- и времени, которое прошло от начала эксплуатации до $i$-го состояния – $t_1$.

Графическая интерпретация процедуры определения параметра $\lambda$ приведена на рис. 2.

При известном значении параметра «интенсивность отказов $\lambda$» из модели жизненного цикла элемента (11) определяется время перехода в следующее дискретное состояние. Для случая пятого дискретного состояния это будет остаточный ресурс $T - t_1$ (см. рис. 2).

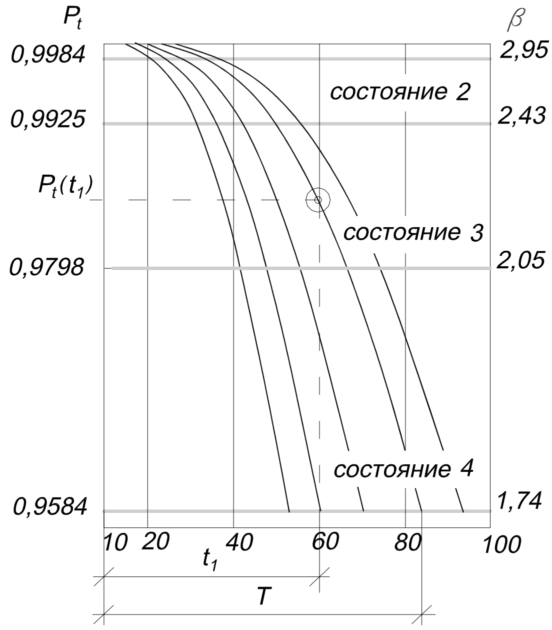


Рис. 2. К определению параметра «интенсивность отказов $\lambda$»

Очевидно, что предложенный прием получения значения управляющего параметра модели жизненного цикла элемента из «*настоящего*», т.е. $i$-го дискретного состояния, дает полную информацию об истории нагружения в «прошлом», и не только. Определенный по этой процедуре параметр «интенсивность отказов $\lambda$» несет в себе много другой информации, относящейся к условиям эксплуатации, содержанию сооружения, качеству строительства, особенностям конструкции и т.п.

Другое дело, что всю эту информацию из истории жизненного цикла параметр $\lambda$ содержит интегрально, разделить ее (информацию) по типам данных не представляется возможным. Однако для целей управления жизненным циклом сооружения в системе эксплуатации, предлагаемая процедура определения параметра интенсивности отказов $\lambda$ достаточно достоверна и принята в практике оценки и прогноза технического состояния элементов мостов [5].

### Выводы

Изложенное в этой статье построение марковской стохастической модели накопления повреждений достаточно убедительно показывает возможность использования события $k_n$ для предсказания времени наступления события $k_{n+1}$.

Марковская модель накопления повреждений в сочетании с предложенным приемом определения параметра интенсивности отказов $\lambda$

являются универсальным аппаратом прогноза жизненного цикла сооружения в системе эксплуатации. Ее параметр интенсивности отказов несет *всю полноту истории нагружения*, в самом общем понимании этого термина.

В предлагаемой нами формулировке, модель не зависит ни от материала, ни от типа конструкции. Это обстоятельство позволяет рекомендовать ее для прогноза остаточного срока службы любых элементов строительной инфраструктуры.

Для прогноза ресурса элементов мостов на стадии проектирования модель (11) не может быть рекомендована непосредственно. Очевидно, что для управления долговечностью элемента на стадии проектирования одного параметра интенсивности отказов недостаточно.

Чтобы предоставить марковской модели накопления повреждений чувствительность к физическим, механическим, конструктивным характеристикам элемента и условиям окружающего среды, потребуются обстоятельные исследования. Конечной целью этого исследования должно быть построение функции интенсивности отказов, зависящей от перечисленных выше факторов и времени.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. Богданоф, Дж. Вероятностные модели накопления повреждений [Текст] / Дж. Богданоф. – М.: 1989.
2. Болотин, В. В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений [Текст] / В. В. Болотин. – М.: Стройиздат, 1971.
3. Бондаренко, В. М. Инженерные методы нелинейной теории железобетона [Текст] / В. М. Бондаренко, С. В. Бондаренко. – М.: Стройиздат, 1982.
4. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения [Текст] / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – М.: Высш. шк., 2000.
5. ДСТУ-Н Б.В.2.3-23:2009. Настанова з оцінювання і прогнозування технічного стану автодорожніх мостів [Текст]. – К.: Мінрегіонбуд України, 2009.
6. Иосилевский, Л. И. Практические методы управления надежностью железобетонных мостов [Текст] / Л. И. Иосилевский. – М.: НИЦ «Инженер», 1999.
7. Карпенко, Л. И. Общие модели механики железобетона [Текст] / Л. И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1996.
8. Лантух-Лященко, А. І. Оцінка надійності споруди за моделлю марковського випадкового процесу з дискретними станами [Текст] / А. І. Лантух-Лященко // Автомобільні дороги і дорожнє будівництво: зб. наук. пр. – К.: 1999.
9. Лучко, Й. Й. Методи оцінки тріщиностійкості та довговічності залізобетонних елементів конструкцій [Текст]: автореф. дис. … д-ра техн. наук. – К., 1999.
10. Лучко, Й. Й. Методи підвищення корозійної стійкості та довговічності бетонних і залізобетонних конструкцій і споруд [Текст] / Й. Й. Лучко, І. І. Глагола, Б. Л. Козаревич. – Львів: Каменяр, 1999.
11. Панасюк, В. В. Механика квазихрупкого разрушения материалов [Текст] / В. В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1991.
12. Панасюк, В. В. Механика разрушения и прочность материалов [Текст]: Справ. пос. в 4-х т. / под. ред. В. В. Панасюка. – К.: Наук. думка, 1988–1990.
13. Пирадов, К. А. Механика разрушения железобетона [Текст] / К. А. Пирадов, Е. А. Гузеев. – М.: 1998.
14. Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин [Текст]: зб. наук. ст. / наук. кер. акад. НАН України Б. Є. Патон. – Ін-т електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України. – К., 2006.
15. Чирков, В. П. Вероятностные методы расчета мостовых железобетонных конструкций [Текст] / В. П. Чирков. – М.: Транспорт, 1980.
16. Reliability-Based Life-Cycle Management of Highway Bridges [Текст] / D. Frangopol *et al.* // J. of Computing in Civil Engineering/ – January 2001. – P. 27-34.
17. Miner, M. A. Cumulative damage in fatigue [Текст] / M. A. Miner // J. Applied Mech. – 1945. – № 12. – P. 159-164.
18. Palmgren, A. Die Lebensdauer von Kugellagern [Текст] / A. Palmgren // Zeitschrift für Deutsche Ingenieure. – 1924. – No. 68. – S. 339-341.



Поступила в редколлегию 12.04.2010.
Принята к печати 15.04.2010.