УДК 624.042.8

А. С. РАСПОПОВ (ДИИТ)

СТРУКТУРА ЧАСТОТНЫХ УРАВНЕНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Використовуються графові та автоматні моделі для складання частотних рівнянь просторових коливань стержневих систем з розподіленими параметрами. Наведено приклад розрахунку коливань бірегулярної балки з різноманітними характеристиками перерізів.

Используются графовые и автоматные модели для составления частотных уравнений пространственных колебаний стержневых систем с распределенными параметрами. Приведен пример расчета колебаний бирегулярной балки с различными характеристиками сечений.

The graph and finite-state machine models for forming spatial vibration frequency equations with continuous parameters are used. The example of calculation of vibrations of bi-regular beam with different section characteristics is presented.

В работе [1] представлены различные топологические модели оригинального стержня, проведена структурная оптимизация графа системы, показаны возможные пути его преобразования. Рассмотрены вопросы декомпозиции графов на компоненты, соответствующие непересекающимся связным подграфам системы и определенным видам колебаний. Установлена логическая связь между компонентами графа GR и граничными параметрами оригинального стержня. В данной статье более детально исследуется структура частотных уравнений для общего случая пространственных колебаний.

Рассмотрим участок прямого стержня, ограниченного сечениями $k-1$, k, длиной l. В общем случае сечение характеризуется компонентами линейного и углового перемещений и компонентами внутренних усилий и моментов, которые образуют вектор перемещений $\tilde{u}$ и вектор усилий $\tilde{q}$. Вектор состояния $\tilde{S}(x)$ в любом сечении x ($x_{k-1} < x < x_k$) имеет порядок n и может быть записан в виде

$$\tilde{S}(x) = \left\| \frac{\tilde{u}(x)}{\tilde{q}(x)} \right\|. \qquad (1)$$

В предположении малости перемещений и идеальной упругости материала продольные, изгибные (в двух плоскостях) и крутильные колебания будут не связаны между собой, могут быть описаны независимыми уравнениями и на основе принципа суперпозиции объединены в одно матричное уравнение [2]. Для свободных колебаний стержня после разделения переменных уравнения с частными производными сводятся к обыкновенным однородным дифференциальным уравнениям, выражающим равновесие стержня в амплитудном состоянии [2, 3]

$$\left.\begin{aligned} &u''_x(x) + \frac{\lambda_x^2}{l^2} u_x(x) = 0; \quad \varphi''_x(x) + \frac{\lambda_\varphi^2}{l^2}\varphi_x(x) = 0; \\ &u_y^{\mathrm{IV}}(x) - \frac{\lambda_y^4}{l^4} u_y(x) = 0; \quad u_z^{\mathrm{IV}}(x) - \frac{\lambda_z^4}{l^4} u_z(x) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В приведенных уравнениях не учтены поперечные сдвиги и инерция поворота сечений, которыми также пренебрегают в обычной технической теории колебаний [8].

Общие интегралы уравнений (2), как известно, содержат две произвольных постоянных для продольных (крутильных) и четыре – для изгибных колебаний, которые можно выразить через начальные параметры стержня

$$\left.\begin{aligned} &u_x(x) = u_x(0)\cos\frac{\lambda_x x}{l} + \frac{u'_x(0)}{\alpha\lambda_x}\sin\frac{\lambda_x x}{l}; \quad \varphi_x(x) = \varphi_x(0)\cos\frac{\lambda_\varphi x}{l} + \frac{\varphi'_x(0)}{\beta\lambda_\varphi}\sin\frac{\lambda_\varphi x}{l}; \\ &u_y(x) = u_y(0)S_y\left(\frac{\lambda_y x}{l}\right) + u'_y(0)\frac{l}{\lambda_y}T_y\left(\frac{\lambda_y x}{l}\right) + u''_y(0)\frac{l^2}{EJ_z\lambda_y^2}U_y\left(\frac{\lambda_y x}{l}\right) + u'''_y(0)\frac{l^3}{EJ_z\lambda_y^3}V_y\left(\frac{\lambda_y x}{l}\right); \\ &u_z(x) = u_z(0)S_z\left(\frac{\lambda_z x}{l}\right) + u'_z(0)\frac{l}{\lambda_z}T_z\left(\frac{\lambda_z x}{l}\right) + u''_z(0)\frac{l^2}{EJ_y\lambda_z^2}U_z\left(\frac{\lambda_z x}{l}\right) + u'''_z(0)\frac{l^3}{EJ_y\lambda_z^3}V_z\left(\frac{\lambda_z x}{l}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где $\lambda_y^4 = \dfrac{\mu\omega^2 l^4}{EJ_z}$, $\lambda_z^4 = \dfrac{\mu\omega^2 l^4}{EJ_y}$, $\lambda_x^2 = \dfrac{\mu\omega^2 l^2}{EF}$, $\lambda_\varphi^2 = \dfrac{J_x \omega^2 l^2}{GJ_\text{к}}$ – частотные параметры, соответственно, для изгибных (в плоскостях xy и xz), продольных и крутильных колебаний; $\alpha = EF/l$, $\beta = GJ_\text{к}/l$, l – длина стержня; μ – погонная масса; EJ_y, EJ_z, EF, $GJ_\text{к}$ – жесткости при изгибе, растяжении-сжатии, кручении; J_x – погонный момент инерции массы стержня относительно его продольной оси; ω – круговая частота колебаний.

Принимая во внимание дифференциальные зависимости

$$\left.\begin{aligned}
&EFu_x'(0) = q_x(0);\quad GJ_\text{к}\varphi_x'(0) = m_x(0);\quad u_y'(0) = \varphi_z(0);\\
&EJ_z u_y''(0) = m_z(0);\quad EJ_z u_y'''(0) = q_y(0);\quad u_z'(0) = \varphi_y(0);\\
&EJ_y u_z''(0) = m_y(0);\quad EJ_y u_z'''(0) = q_z(0);\\
&S_r' = \frac{\lambda_r}{l}V_r;\quad V_r' = \frac{\lambda_r}{l}U_r;\quad U_r' = \frac{\lambda_r}{l}T_r;\quad T_r' = \frac{\lambda_r}{l}S_r;\quad r = y, z,
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

представим решение задачи Коши в матричной форме

$$\tilde{S}(x) = B(x)\tilde{S}(0), \tag{5}$$

где $\tilde{S}(x)$ – вектор состояния стержня в точке x; $\tilde{S}(0)$ – вектор начальных параметров; $B(x)$ – матрица фундаментальных ортогональных функций [2] или матрица влияния, начальных параметров, переходная (передаточная) матрица [4].

Структура уравнений (5) аналогична структуре представления уравнений типа Вольтерра 2-го рода [2], а также ортогональных уравнений [5].

Далее составление частотных уравнений для простых видов колебаний, как правило, осуществляется по двум путям. Первый из них, традиционный, основан на составлении формул перехода метода начальных параметров от сечения к сечению с последовательным перемножением матриц для каждого характерного участка, промежуточной опоры, сосредоточенной массы и т.д. и последующем приравнивании нулю определителя всей системы, который получается в зависимости от краевых условий. Второй путь, предложенный авторами [2], позволяет на основе метода граничных элементов свести краевую задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно начальных и конечных параметров всех стержней. При этом матрица B преобразуется к квазидиагональному виду, а уравнение частот получается приравниванием нулю соответствующего определителя системы.

В данном случае предлагается иной подход, позволяющий объединить теорию ассоциированных матриц с возможностями комбинаторной топологии (теории цепей) и на этой основе избежать составление и раскрытие частотных определителей.

Для формирования ассоциированной матрицы M_{xyz} представим матрицу $B(x)$ в транспонированной форме $B_t(x)$ и соответствующие ей вектора $\tilde{S}_t(x) = S(x)$, $\tilde{S}_t(0) = S(0)$. Тогда, при граничном значении переменной $x = l$ соотношение между параметрами в сечениях $(k-1)$ и k примет вид

$$S_k = S_{k-1}B_{tk}, \tag{6}$$

где $S_{k-1,k} = \left\| u \mid q \right\|_{k-1,k}$;

$$u_{k-1,k} = \left\| u_x,\ \varphi_x,\ u_y,\ \varphi_z,\ u_z,\ \varphi_y \right\|_{k-1,k};$$

$$q_{k-1,k} = \left\| m_y,\ q_z,\ m_z,\ q_y,\ m_x,\ q_x \right\|_{k-1,k}.$$

Такое расположение параметров соответствует расположению элементов в матрице достижимости M_{GR} графа GR [1]. Поэтому матрицу B_{tk} можно выразить в виде прямой суммы [6] ее компонент, характеризующих отдельные виды колебаний стержня

$$B_{tk} = B_x \oplus B_\varphi \oplus B_y \oplus B_z. \tag{7}$$

Определители миноров этой матрицы формируют все выходные последовательности автомата, представляющего данную систему, а также элементы ассоциированных матриц, соответствующих определенному виду колебаний и располагаемых в порядке логического следования кодов начальных и концевых граничных параметров стержня [1]. В результате прямого (кронекеровского) произведения таких матриц образуется ассоциированная матрица для общего случая пространственных колебаний

$$M_{xyz} = M_x \otimes M_\varphi \otimes M_y \otimes M_z . \qquad (8)$$

Каждое изменение состояния автомата A соответствует определенной стадии преобразования системы в каждый тактовый момент времени. При этом в графе GR каждому ребру между вершинами НП и КП соответствует скалярная величина f_z. Для множества состояний автомата из этих величин образуется матрица или, если следовать теории электрических цепей, тензор связи. В общем случае в графе GR каждый тензор связи соответствует ассоциированной матрице.

Матрица M_{xyz} содержит совокупность значений всех выходов автомата A и характеризует все возможные состояния системы S в зависимости от ее граничных параметров. Коды этих параметров являются также составными элементами топологического кода графа G, который, в свою очередь, дает возможность непосредственного определения характеристических функций f_z и f_s автомата A.

Рассмотрим топологическую модель неразрезной балки в виде конечного нетривиального автомата A и взаимно связанных подавтоматов A_1, A_2, …, A_p, моделирующих отдельные кусочно-непрерывные участки – стержни 1, 2, …, p (рис. 1). Все стержни имеют локальную систему координат, совпадающую по направлениям с глобальной, расположенную в начале каждого стержня, а также последовательную, сквозную для всей конструкции нумерацию, начиная с единицы. По существу, в результате декомпозиции сложной последовательностной системы A получено множество ее более простых частей (подсистем) A_1, A_2, …, A_p, действующих одновременно (синхронно) [7].

В этом случае множество состояний автомата A зависит также от промежуточных переменных $x_m^{(i)}$, $m = 1, 2, \ldots, p-1$ и состоит из множества состояний каждой из подсистем. Совокупность значений всех выходов автомата определяется выходами подавтоматов A_1, A_2, …, A_p, представленными ассоциированными матрицами V_1, M_2, …, M_{p-1}, $\tilde{V}_p$ каждого из p участков системы.

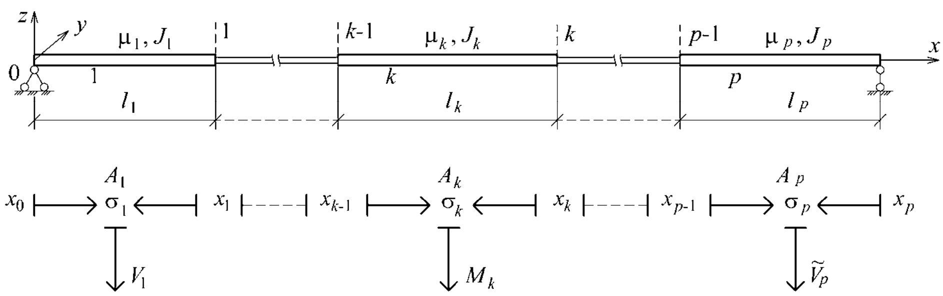

Рис. 1. Топологическая модель неразрезной балки

В соответствии с классификацией, принятой в работе [2], будем различать три группы граничных параметров: зависимые, независимые и нулевые, которые определяются заданными условиями опирания (краевыми условиями).

Пары векторов состояний переменных в разделяющих участки сечениях являются двойственными: если x_k является воздействием для автомата A_{k+1}, то x_{k+1} является воздействием для A_k и т.д.

Следующим шагом является определение соотношений между состояниями зависимых граничных параметров в месте сопряжения стержней. Нетрудно заметить, что для однопролетного стержня, который имеет длину, стремящуюся к нулю ($B(l) = E$), выполнение любого из условий (2) возможно лишь тогда, когда состояния НП и КП стержня будут прямо противоположны. К примеру, для изгибных колебаний, если код НП составляет 0101, то код КП будет равен 1010, если НП – 0011, то КП – 1100 и т.д. Это обстоятельство позволяет записать условие ортогональности векторов состояний НП, КП стержня при $x = l$ в следующем виде:

$$\tilde{S}_t(l) B(l) \tilde{S}(0) = 0 . \qquad (9)$$

Согласно методу начальных параметров для балки с несколькими участками [4], выражение (5) примет вид

$$\tilde{S}_p = B_p B_{p-1} \ldots B_1 \tilde{S}_0 , \qquad (10)$$

или с учетом (9) при $\tilde{S}_{tp} = S_p$

$$S_p B_p B_{p-1} \dots B_1 \tilde{S}_0 = 0 . \quad (11)$$

Однако, более удобным представляется использование транспонированной формы (6), которая позволяет записать

$$S_p = S_0 B_{t1} B_{t2} \dots B_{tp} , \quad (12)$$

или, при $S_{tp} = \tilde{S}_p$

$$S_0 \prod_{k=1}^{p} B_{tk} \tilde{S}_p = 0 . \quad (13)$$

Таким образом, возможные состояния зависимых граничных параметров слева $S_{k-1}^{\text{кп}}$ и справа $S_k^{\text{нп}}$ от сечения $(k-1)$ будут связаны следующими соотношениями

$$S_{k-1}^{\text{кп}} + S_k^{\text{нп}} = E ; \quad S_{k-1}^{\text{кп}} \cdot S_{tk}^{\text{нп}} = 0 . \quad (14)$$

В теории графов [6] это свойство связано с операциями сложения и умножения по модулю 2 ($\bmod 2$), характерными для поля Галуа $GF(2)$.

Отмеченные зависимости позволяют сделать вывод, что булевы функции X, выражающие состояния граничных параметров стержней в разделяющих участки сечениях, обладают свойством ортогональности. Это означает, что

$$\sum_{i=1}^{n} X_{k-1}^{(i)} X_k^{(i)} = 0 . \quad (15)$$

Если следовать аналогии ортогональности собственных форм колебаний [8], то условие ортогональности (15) для каждого из состояний системы выражает факт равенства нулю работы всех внутренних сил на возможных перемещениях в разделяющих систему сечениях. Это подтверждается также исследованиями Г. Крона относительно инвариантности (неизменности) упругой энергии, которая означает, что накопленная упругая энергия в примитивной системе равна упругой энергии и в соединенной системе [5]. Кроме этого, автомат A с учетом соотношений (15) позволяет получить зависимости между переменными, которые связаны определенными логическими условиями в каждом сечении системы, отображают ее структурные свойства и могут служить основой для построения уравнений сечений или топологических уравнений [6].

Согласно [4, 9], если матрицу B можно представить в виде произведения некоторых матриц B_k, то и ассоциированная матрица M, составленная для B, равна произведению соответствующих ассоциированных матриц M_k, составленных для B_k. Поэтому уравнение частот в форме (13) можно выразить в виде последовательного произведения ассоциированных матриц [10] каждого из p участков системы

$$V_1 \prod_{k=2}^{p-1} M_k \tilde{V}_p = 0 , \quad (16)$$

где V_1 и $\tilde{V}_p$ – матрица-строка и матрица-столбец 1-го и p-го участков.

Как и в предыдущем случае, уравнение (16) выражает условие ортогональности векторов с характеристиками участков и, очевидно, имеет энергетический смысл, как и условие ортогональности собственных форм колебаний стержня. Соотношения характеристических функций f_s и f_z в конечном автомате аналогичны уравнениям равновесия, а начальное состояние автомата в момент времени t_1 аналогично начальному распределению энергии в системе [11].

Если в результате разбиения множества состояний автомата A на p частей получено набор подмножеств состояний π, характеризуемых матрицами выходов V_1, M_2, …, M_{p-1}, $\tilde{V}_p$, то уравнение (16) будет выражать основную теорему декомпозиции [7]

$$\prod_{k=1}^{p} \pi_k = 0 . \quad (17)$$

В другой форме [10, 11] уравнение (16) можно представить как сумму произведений выходов f_{zk} каждого подавтомата A_k при каждом возможном состоянии s_ν в момент времени t_ν, т.е.

$$\sum_{\nu=1}^{s} \left(\prod_{k=1}^{p} f_{zk} \right) = 0 . \quad (18)$$

Множество входов автомата A определяется возможными входами подавтоматов A_1, A_2, …, A_p. Объединение множества состояний A_1, A_2, …, A_p образует множество состояний S автомата A. Кодирование внутренних состояний имеет свои особенности, т.к. входы

k-й подсистемы связаны с входами $(k-1)$-й и $(k+1)$-й подсистем.

Для регулярных и квазирегулярных стержневых систем уравнения (13), (16) преобразуются к виду

$$S_0 B_{tk}^p \tilde{S}_p = 0\,; \quad V_1 M_k^{p-2} \tilde{V}_p = 0\,. \qquad (19)$$

Этот случай представляет значительный практический интерес, т.к. такие конструкции получают все большее распространение в инженерной практике. В частности, квазирегулярные системы более технологичны в изготовлении, чем полностью нерегулярные и более экономичны по расходу материала по сравнению с регулярными [12].

Для описания колебаний таких систем следует использовать эквивалентные автоматы, имеющие одинаковые таблицы переходов, а также их свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности [6, 11]. Очень часто встречаются почти регулярные конструкции с периодической или кратной регулярностью (частично нерегулярные, бирегулярные и т.д.), для которых также могут использоваться эквивалентные автоматы и их минимальные формы.

К примеру, для продольных и поперечных колебаний составной бирегулярной балки [12], состоящей из последовательно соединенных длинных и коротких балок с различными характеристиками сечений на рис. 2 представлены графики изменения частотных параметров λ_{x1}, λ_{z1} первой зоны сгущения в зависимости от величины отношения номера формы колебаний i, количества пролетов p и значений коэффициентов $c_x = \dfrac{\mu_1 l_1^2 F_2}{\mu_2 l_2^2 F_1}$, $c_z = \dfrac{\mu_1 l_1^4 J_{y2}}{\mu_2 l_2^4 J_{y1}}$. В первом случае продольных колебаний граничные условия для неразрезной балки приняты в виде заделки, во втором – в виде шарнирного опирания.

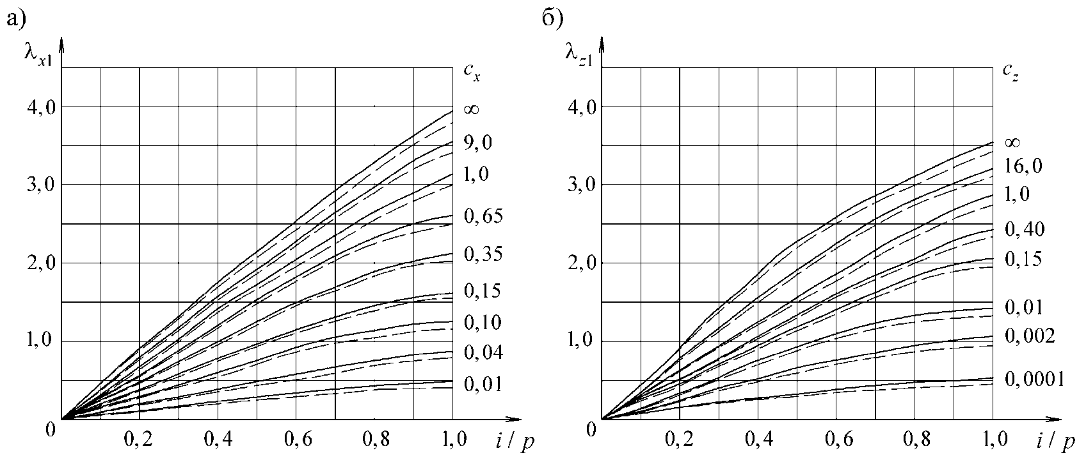

Рис. 2. Значения частотных параметров λ_{x1}, λ_{z1} для бирегулярных балок

Полученные решения сравнивались с результатами расчетов по МКЭ (пунктирные линии на рис. 2), которые оказались достаточно близкими для бирегулярных балок с распределенной и сосредоточенной массами. Следует отметить относительно высокую плотность частотного спектра, особенно при значениях коэффициентов c_x, $c_z > 1$.

Таким образом, необходимо получить минимальную (сокращенную) форму автомата A, в котором никакие два состояния не являются эквивалентными, а минимальный путь, составляющий полный контур системы, проходит через все состояния в автомате A только один раз. Такое представление автомата A является наиболее компактным в смысле количества используемых состояний. Следует также отметить широкие возможности применения графов и автоматов в нахождении оптимального пути решения задач динамики стержневых систем с наибольшей экономией вычислений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Распопов, А. С. Конечно-графовый подход к решению задач динамики стержневых конструкций [Текст] / А. С. Распопов // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – 2008. – Вип. 21. – Д.: Вид-во ДНУЗТ, 2008. – С. 170-176.
2. Строительная механика. Применение метода граничных элементов [Текст] / под ред. В. А. Баженова. – Одесса: Астропринт, 2001. – 288 с.

3. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений [Текст] / под ред. А. Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
4. Ивович, В. А. Переходные матрицы в динамике упругих систем [Текст] : справочник / В. А. Ивович. – М.: Машиностроение, 1981. – 183 с.
5. Крон, Г. Исследование сложных систем по частям (диакоптика) [Текст] / Г. Крон. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
6. Сигорский, В. П. Математический аппарат инженера [Текст] / В. П. Сигорский. – К.: Техника, 1975. – 768 с.
7. Кунцманн, Й. Булева алгебра и конечные автоматы [Текст] / Й. Кунцманн, П. Наслин. – М.: Мир, 1969. – 294 с.
8. Вибрации в технике [Текст] : справочник в 6 т. – Т. 1.: Колебания линейных систем / под ред. В. В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
9. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц [Текст] / Ф. Р. Гантмахер. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 552 с.
10. Эйхе, Г. Н. Приложение теории конечных автоматов к решению задач динамики стержневых конструкций [Текст] / Г. Н. Эйхе // Межвуз. сб. науч. тр. Днепропетр. ин-та инж. ж.-д. трансп. – 1985. – С. 91-105.
11. Гилл, А. Введение в теорию конечных автоматов [Текст] / А. Гилл. – М.: Наука, 1966. – 272 с.
12. Галишникова, В. В. Регулярные стержневые системы (теория и методы расчета) [Текст] / В. В. Галишникова, В. А. Игнатьев. – Волгоград: ВолгГАСУ, 2006. – 552 с.

Поступила в редколлегию 30.03.2009.
Принята к печати 09.04.2009.