

УДК 658.51.012

Г. К. КОЖЕВНИКОВ¹, О. М. ПИГНАСТЫЙ^{2*}¹Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», ул. Пушкінська, 79-2, Харків, Україна, 61002, тел. +38 (050) 776 88 79, ел. пошта kgk4711@gmail.com, ORCID 0000-0002-6586-6767^{2*}Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», ул. Пушкінська, 79-2, Харків, Україна, 61002, тел. +38 (067) 572 50 29, ел. пошта pihnastyi@gmail.com, ORCID 0000-0002-5424-9843**РАСПРЕДЕЛЕННАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ PDE-МОДЕЛЬ ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЗАГРУЗКОЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ЛИНИИ**

Цель. В работе необходимо рассмотреть проектирование системы управления параметрами производственной линии для предприятия с поточным методом организации производства. **Методика.** Производственная линия предприятия с поточным методом организации производства – это сложная динамическая распределенная система. Технологический маршрут изготовления изделия для многих современных предприятий содержит несколько сотен технологических операций, в межоперационном заделе каждой из которых содержатся тысячи изделий, ожидающих обработку. Технологические маршруты разных деталей одного вида изделий пересекаются. Это приводит к тому, что распределение предметов труда вдоль технологического маршрута оказывает значительное влияние на пропускную способность производственной линии. Для описания таких систем введен новый класс моделей производственных линий (PDE-model). Модели этого класса используют уравнения в частных производных для описания поведения потоковых параметров производственной линии. В данной статье построена PDE-модель производственной линии, потоковые параметры которой зависят от величины коэффициента загрузки технологического оборудования для каждой операции. **Результаты.** Авторы получили оптимальное управление потоковыми параметрами производственной линии, в основу которого положен алгоритм изменения коэффициента загрузки технологического оборудования производственной линии. В качестве базового нормативного режима функционирования поточной линии рассмотрен односменный режим работы. Для моделирования работы технологического оборудования после смены использована обобщенная функция Дирака. **Научная новизна** заключается в разработке метода проектирования систем управления параметрами производственной линии предприятий с поточным методом организации производства, основанного на PDE-модели объекта управления. Авторы предложили метод построения оптимального управления параметрами поточной линии через управление коэффициентом загрузки технологического оборудования. При проектировании системы управления поточная линия представлена динамической системой с распределенными потоковыми параметрами. **Практическая значимость.** Предложенный метод проектирования системы управления потоковыми параметрами производственной линии может быть положен в основу проектирования высокоэффективных систем управления потоковыми параметрами производства для предприятий по изготовлению полупроводниковой продукции автомобильной отрасли.

Ключевые слова: конвейер; производственная линия; PDE-модель производства; системы управления производством; незавершенное производство; массовое производство

Вступление

На поточной линии предприятия требуется обработать партию изделий за производственный цикл минимальной продолжительности [8]. Для технологического процесса определены:

а) последовательность операций и их технологические параметры;

б) оборудование, необходимое для выполнения операции, параметры его работы и схема расстановки;

в) свойства предмета труда и законы переноса ресурсов на предметы труда в результате воздействия оборудования.

Предполагается, что технология производства за время производственного цикла не меняется, т. е. параметры, характеризующие опе-

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

рацію, остаються незмінними. Продовжителю сменн задана, складаєть восемь часов. Сокращение длителюности производственного цикла возможно за счет изменения режима загрузки оборудования. Величину загрузки оборудования при обработке партии изделий будем характеризовать коэффициентом сменности работы оборудования в течение суток K_{Sm} . Полагаем, что стоимость одного часа работы оборудования является разнот для каждой операции и зависит от времени суток. Поточными параметрами модели управляемого производственного процесса в двухмоментном описании являются межоперационные заделы, характеризующиеся плотностью $[\chi]_0(t, S)$, и темп движения предметов труда $[\chi]_1(t, S)$ по технологическому маршруту [1, 9, 10, 11]. Для описания поведения потоковых параметров в пространстве и времени используем одномерное координатное пространство (t, S) [2, 6]. Координата S определяет место предмета труда в технологическом маршруте. Введенное одномерное координатное пространство (t, S) позволяет построить компактные, качественно обозримые модели управления параметрами поточной линии. Разобьем координатную ось OS на отрезки $\Delta S_m \in [S_{m-1}, S_m]$. Координаты S_{m-1} и S_m характеризуют начало и окончание m -ой операции, $m = 1..M$. При этом полагаем, что $S_0 = 0$, $S_M = S_d$, где S_d – себестоимость продукции. Пусть функция $z_c(t, S_m)$ определяет стоимость сверхнормативных затрат ресурсов, необходимых для использования дополнительного оборудования в течение одного часа на m -ой операции. Зависимость функции $z_c(t, S_m)$ от времени подразумевает то, что в течение производственного цикла стоимость сверхнормативных затрат ресурсов, необходимых для выполнения операции на дополнительном оборудовании, может меняться во времени. Под использованием дополнительного оборудования понимаем использование резервного оборудования требуемое время или основного оборудования в дополнительное время (коэффици-

ент сменности $K_{Sm} < 3$) [5]. Одним из подходов, позволяющим синхронизировать производительность обработки предметов труда на разных операциях поточной линии, является использование основного оборудования в дополнительное время между основными технологическими сменами (управление коэффициентом сменности технологического оборудования для заданной технологической операции). Если в качестве оси времени пространства состояний выбрать отработанное оборудованием время при одностороннем режиме работы, то состояние заделов в течение промежутка между моментом окончания смены и началом другой смены в случае использования основного оборудования в течение второй и третьей смены будет меняться скачкообразно на величину обработанных изделий в течение второй и третьей смены.

Введем плотность распределения стоимости сверхнормативных затрат технологических ресурсов, требуемых для выполнения работ на дополнительном оборудовании в течение часа, для технологического маршрута на интервале $[0, S_d]$ (рис. 1):

$$\int_{S_{m-1}}^{S_m} \omega_z(t, S) dS = z_c(t, S_m);$$

$$\int_0^{S_d} \omega_z(t, S) dS = \sum_{m=1}^M \int_{S_{m-1}}^{S_m} \omega_z(t, S) dS = \sum_{m=1}^M z_c(t, S_m).$$

Введем функцию $W_\delta(t, S)$, характеризующую работу дополнительного оборудования (основного оборудования во вторую или третью смену, коэффициент сменности $K_{Sm} > 1$). Определим

$$\int_{t_1}^{t_2} W_\delta(t, S) dt$$

как количество отработанных дополнительным оборудованием (расположенным в окрестности координаты S технологического маршрута) часов за промежуток времени $\Delta t = (t_2 - t_1)$. В результате включения дополнительного оборудования, обеспечивающего обработку предметов труда во вторую и третью смену с темпом, рав-

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

ным темпу работы основного оборудования $[\chi]_{1\text{вр}}(t, S)$, общий темп движения предметов труда в точке технологического маршрута с координатой S увеличивается на величину $[\chi]_{1\text{вр}}(t, S) \cdot W_\delta(t, S)$. За время $\Delta t = (t_2 - t_1)$ работы дополнительного оборудования через точку технологического маршрута с координатой S пройдет дополнительный поток предметов труда общим количеством

$$\int_{t_1}^{t_2} [\chi]_{1\text{вр}}(t, S) \cdot W_\delta(t, S) dt$$

единиц. Стоимость сверхнормативных затрат, необходимых для обеспечения работы дополнительного оборудования, расположенного на участке $\Delta S_m \in [S_{m-1}, S_m]$ и используемого для выполнения m -ой операции за длительность производственного цикла T_d , определяем интегралом:

$$\int_0^{T_d} \int_{S_{m-1}}^{S_m} W_\delta(t, S) \cdot \omega_z(t, S) dS dt.$$

Общая стоимость C_{cb} сверхнормативных затрат технологических ресурсов за время производственного цикла T_d может быть рассчитана как:

$$C_{cb}(T_d) = \int_0^{T_d} \int_0^{S_d} W_\delta(t, S) \cdot \omega_z(t, S) dS dt.$$

Цель

Построение системы управления потоковыми параметрами производственной линии, которая базируется на управлении коэффициентом сменности функционирования технологического оборудования.

Методика

Производственная линия предприятия с поточным методом организации производства рассмотрена как динамическая распределенная система. Технологический маршрут изготовления изделия для многих современных предприятий содержит несколько сотен технологиче-

ских операций, в межоперационном заделе каждой из которых содержатся тысячи изделий, ожидающих обработку. Технологические маршруты разных деталей одного вида изделий пересекаются. Это приводит к тому, что распределение предметов труда вдоль технологического маршрута оказывает значительное влияние на пропускную способность производственной линии. Для описания таких систем введен новый класс моделей производственных линий (PDE-model). Модели этого класса используют уравнения в частных производных для описания поведения потоковых параметров производственной линии. В данной статье построена PDE-модель производственной линии, потоковые параметры которой зависят от величины коэффициента загрузки технологического оборудования для каждой операции. Для описания распределенной динамической системы использована PDE-модель поточной линии [1, 9–14]. При этом рассмотрен в качестве базового режима функционирования односменный режим работы производственного предприятия.

Результаты

Параметры линии для непрерывного поточного производства с достаточно большим количеством операций удовлетворяют системе балансовых уравнений:

$$\frac{\partial [\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_1(t, S)}{\partial S} = 0, \quad (1)$$

$$[\chi]_1(t, S) = [\chi]_{1\text{вр}}(t, S).$$

Нормативный темп $[\chi]_{1\text{вр}}(t, S)$ обработки предметов труда для поточной линии является заданным в каждой точке технологического маршрута и для каждого момента времени. Параметрами модели управляемого производственного процесса в двухмоментном описании являются межоперационные заделы, характеризующие плотностью $[\chi]_0(t, S)$ распределения предметов труда вдоль технологического маршрута, и их темп движения $[\chi]_1(t, S)$ [8]. Управление величиной потоковых параметров $[\chi]_0(t, S)$, $[\chi]_1(t, S)$ осуществляем путем ре-

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

гулювання места включення в технологічному маршруті додаткового обладнання і довготривалості його включення (зміна коефіцієнта сменності функціонування технологічного обладнання, $K_{Sm} > 1$).

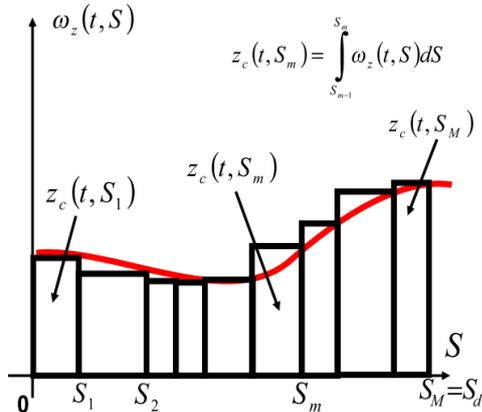


Рис. 1. Плотность распределения $\omega_z(t, S)$

Fig. 1. Distribution density $\omega_z(t, S)$

Управляющая функция

$$U_\delta(t, S) = W_\delta(t, S)$$

определяет величину длительности включения дополнительного оборудования в указанном месте технологического маршрута с координатой S в момент времени $t = t_q$, где t_q – время окончания q -ой смены ($q = 1, 2, 3, \dots$). Интервал планирования для рассматриваемой линии равен интервалу протяженности трех смен (суточный интервал планирования) при односменном режиме работы основного оборудования. В качестве дополнительного использовано основное оборудование $K_{Sm} > 1$, обрабатывающее предметы труда во вторую и третью смену с темпом $[\chi]_{1\psi}(t, S)$.

Поведение параметров $[\chi]_0(t, S)$, $[\chi]_1(t, S)$ поточной линии ограничено начальными условиями распределения предметов труда по технологическому маршруту и целью управления:

$$[\chi]_0(0, S) = [\chi]_{00}(S),$$

$$[\chi]_0(T_d, S) = [\chi]_{0T_d}(S),$$

а также граничными условиями, определяющими поступление со склада сырья, материалов на первую операцию и выход готовой продукции с последней операции:

$$[\chi]_0(t, 0) = [\chi]_{0S}(t),$$

$$[\chi]_1(t, 0) = [\chi]_{1S}(t).$$

В отсутствие включения дополнительного оборудования параметры $[\chi]_0(t, S)$, $[\chi]_1(t, S)$, $[\chi]_{1\psi}(t, S)$ в момент t_q окончания q -ой смены и начала $(q+1)$ -ой смены являются непрерывными функциями времени t с непрерывными производными n -го порядка:

$$[\chi]_0(t_{q-}, S) = [\chi]_0(t_{q+}, S),$$

$$\frac{\partial^n [\chi]_0(t_{q-}, S)}{\partial t^n} = \frac{\partial^n [\chi]_0(t_{q+}, S)}{\partial t^n},$$

$$[\chi]_1(t_{q-}, S) = [\chi]_1(t_{q+}, S),$$

$$\frac{\partial^n [\chi]_1(t_{q-}, S)}{\partial t^n} = \frac{\partial^n [\chi]_1(t_{q+}, S)}{\partial t^n},$$

$$[\chi]_{1\omega}(t_{q-}, S) = [\chi]_{1\omega}(t_{q+}, S),$$

$$\frac{\partial^n [\chi]_{1\omega}(t_{q-}, S)}{\partial t^n} = \frac{\partial^n [\chi]_{1\omega}(t_{q+}, S)}{\partial t^n}.$$

Обозначения t_{q-} и t_{q+} означают, что функции $[\chi]_0(t, S)$, $[\chi]_1(t, S)$, $[\chi]_{1\psi}(t, S)$ рассматривают в бесконечно малой окрестности слева и справа от t_q . Полагаем, что нормативные параметры, характеризующие операцию в течение производственного цикла T_d , остаются неизменными во времени, т. е.:

$$[\chi]_{1\psi}(t, S) = [\chi]_{1q}(S).$$

Принимая это во внимание, система уравнений (1) может быть проинтегрирована:

$$[\chi]_0(t, S) = [\chi]_0(0, S) - \frac{\partial [\chi]_{1q}(S)}{\partial S} t,$$

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

$$[\chi]_1(t, S) = [\chi]_{1w}(t, S) = [\chi]_{1q}(S). \quad (2)$$

Рис. 2 демонструє збільшення щільності міжопераційних заделів для технологічної m -ої операції в течение продовжителюности цикла T_q для случая, когда отсутствует включение дополнительного оборудования во вторую и третью смену при

$$\left. \frac{\partial [\chi]_{1q}(S)}{\partial S} \right|_{S=S_m} < 0.$$

При этом темп обработки деталей на технологической операции будем считать постоянным в течение времени (рис. 3). Средняя величина суточного темпа может быть изменена в зависимости от значения коэффициента сменности технологического оборудования. Значение времени t_q соответствует времени окончания выполнения работ в q -ю смену при односменном режиме работы основного оборудования (продолжительность рабочей смены):

$$\Delta t_q = (t_q - t_{q-1}) = 8 \text{ (ч)}.$$

Количество межоперационных заделов в момент времени, соответствующий окончанию работ в q -ю смену, равно их количеству на начало работ $(q+1)$ -ой смены (2) (рис. 2).

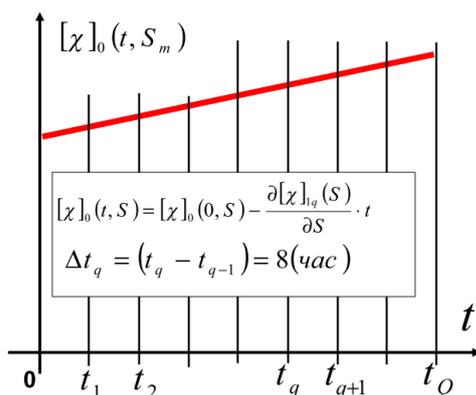


Рис. 2. Величина плотности $[\chi]_0(t, S)$ без включения дополнительного оборудования

Fig. 2. The value of the density $[\chi]_0(t, S)$ without involvement of the additional equipment

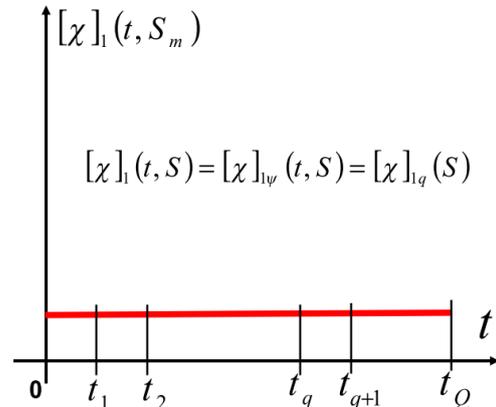


Рис. 3. Величина темпа $[\chi]_1(t, S)$ без включения дополнительного оборудования

Fig. 3. The value of the rate $[\chi]_1(t, S)$ without involving the additional equipment

Увеличение со временем плотности межоперационных заделов приведет к переполнению емкости межоперационного накопителя, находящегося в точке технологического маршрута, определенной координатой S_m , и в конечном итоге, к переполнению накопителей на участке $[0, S_m]$ технологического маршрута с последующей остановкой производственной линии.

Детально условия возникновения процесса переполнения накопителей и исследование эволюции его развития для участка $[0, S_m]$ технологического маршрута изложено в [2, 7, 10, 13].

Для обеспечения бесперебойной работы поточной линии необходимо синхронизировать темп обработки предметов труда на отдельных операциях в пределах интервала времени между началом t_q -ой и началом t_{q+1} -ой рабочей смены. Одним из распространенных методов синхронизации производственной линии в пределах интервала 1-й, 2-й и 3-й смены является условие

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_q - t_{q-1}} \int_{t_{q-1}}^{t_q} [\chi]_{1w}(t, S_{m-1}) dt &= \\ &= \frac{1}{t_q - t_{q-1}} \int_{t_{q-1}}^{t_q} [\chi]_{1w}(t, S_m) dt = const, \end{aligned}$$

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

определяющее равенство суточных темпов обработки изделий на смежных технологических операциях для разных значений времени производственного цикла.

Дополним уравнения (1) управляющей функцией $U_\delta(t, S)$:

$$\frac{\partial[\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial[\chi]_{1q}(S)}{\partial S} = \frac{\partial([\chi]_{1q}(S) \cdot U_\delta(t, S))}{\partial S}, \quad (3)$$

$$U_\delta(t, S) = W_\delta(t, S) = W(t, S) \cdot \delta(t - t_q),$$

$$t_q = 8 \cdot q \text{ (час)}, \quad W(t_q, S) \leq 8 \text{ (час)},$$

определяющей длительности включения оборудования в позиции S в момент времени между окончанием q -ой и началом $(q+1)$ -ой смены ($q = 1, 2, 3, \dots$).

Управление потоковыми параметрами осуществляемое в результате использования дополнительного оборудования в момент времени t_q между окончанием q -ой смены и началом $(q+1)$ -ой смены, определено через дельта-функцию Дирака $\delta(t - t_q)$ [3, 4].

Уравнение для изменения плотности межоперационных заделов (3) может быть проинтегрировано по времени:

$$[\chi]_0(\tau, S) = [\chi]_0(0, S) - \frac{\partial[\chi]_{1q}(S)}{\partial S} \tau - \sum_{q=1}^k \frac{\partial}{\partial S} ([\chi]_{1q}(S) W(t_q, S)), \quad (4)$$

где моменты времени пополнения межоперационных заделов поточной линии

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_q < t_{q+1} < \dots < t_k < \tau \text{ (ч)}$$

при продолжительности работы дополнительного оборудования

$$W(t_1, S), W(t_2, S), \dots, W(t_q, S), \dots, W(t_k, S) \text{ (ч)}$$

Моменты времени пополнения t_q и длительность работы дополнительного оборудования $W(t_q, S) \leq 8$ (ч) зависят от выбора управления. Общее количество предметов труда в межоперационном заделе технологической операции, ограниченной координатами технологического маршрута S_{m-1} и S_m , есть величина:

$$\int_{S_{m-1}}^{S_m} ([\chi]_0(\tau, S) - [\chi]_0(0, S)) dS =$$

$$= -([\chi]_{1q}(S_m) - [\chi]_{1q}(S_{m-1})) \tau -$$

$$- \sum_{q=1}^k ([\chi]_{1q}(S_m) \cdot W(t_q, S_m) - [\chi]_{1q}(S_{m-1}) \cdot W(t_q, S_{m-1})),$$

где $\int_{S_{m-1}}^{S_m} ([\chi]_0(\tau, S) - [\chi]_0(0, S)) dS$ (шт.) – изменение задела m -ой операции за время τ (ч);

$[\chi]_{1q}(S_{m-1}) \tau$ (шт.) – количество предметов труда, которое поступило на m -ую операцию с $(m-1)$ -ой за время τ (ч);

$[\chi]_{1q}(S_m) \tau$ (шт.) – количество предметов труда, которое ушло с m -ой операции на $(m+1)$ -ую за время τ (ч);

$[\chi]_{1q}(S_{m-1}) W(t_q, S_{m-1})$ (шт.) – количество предметов труда, которое поступило на m -ую операцию с $(m-1)$ -ой в результате работы дополнительного оборудования в течение времени $W(t_q, S_{m-1})$ между началом q -ой и началом $(q+1)$ -ой смены;

$[\chi]_{1q}(S_m) W(t_q, S_m)$ (шт.) – количество предметов труда, которое ушло с m -ой операции на $(m+1)$ -ую в результате работы дополнительного оборудования в течение времени $W(t_q, S_m)$ между началом q -ой и началом $(q+1)$ -ой смены.

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

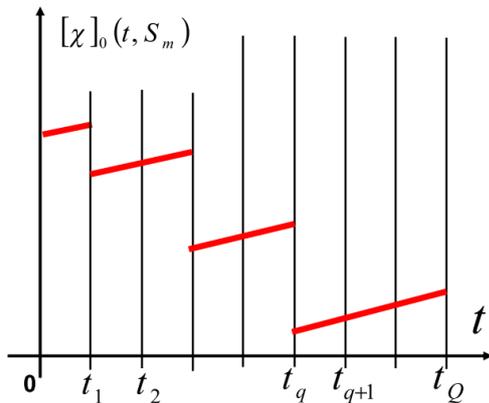


Рис. 4. Величина плотности $[\chi]_0(t, S)$ при включении дополнительного оборудования

Fig. 4. The value of the density $[\chi]_0(t, S)$ involving the additional equipment

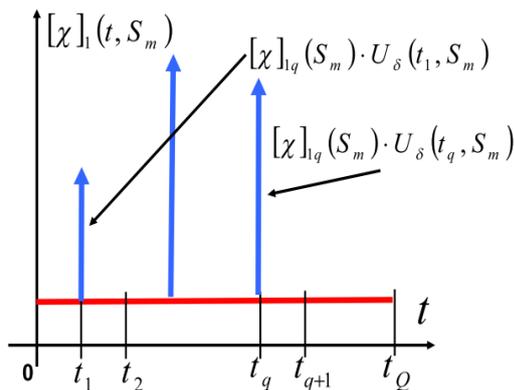


Рис. 5. Величина темпа $[\chi]_1(t, S)$ при включении дополнительного оборудования

Fig. 5. The value of the rate $[\chi]_1(t, S)$ involving the additional equipment

На рис. 4 и 5 представлено поведение потоковых параметров при наличии управляющих воздействий, которые обеспечиваются включением или выключением дополнительного оборудования. Показаны разрывы функции $[\chi]_0(t, S)$ в моменты времени t_q . Разрыв функции $[\chi]_0(t, S)$, соответствующий величине $[\chi]_{1q}(S)W(t_q, S)$, определяется работой дополнительного оборудования производительностью $[\chi]_{1q}(t, S)$, включенного между t_q

и t_{q+1} сменой для обработки предметом труда на время $W(t_q, S)$.

В достаточно общем виде задача построения оптимальной программы для управления потоковыми параметрами $[\chi]_0(t, S)$, $[\chi]_1(t, S)$ при использовании дополнительного оборудования может быть сформулирована следующим образом: определить состояние параметров $[\chi]_0(\tau, S) \in G_0$, $[\chi]_1(\tau, S) \in G_1$ для каждой точки $S \in [0, S_d]$ маршрута в течение промежутка времени $t \in [0, T_d]$ при управлении $U_\delta(t, S) \in G_U$ длительностью работы дополнительного оборудования

$$U_\delta(t, S) = W_\delta(t, S) = W(t, S) \cdot \delta(t - t_q),$$

$$t_q = 8 \cdot q (\text{час}),$$

доставляющих минимум функционалу

$$C_{cb}(T_d) = \int_0^{T_d} \int_0^{S_d} W_\delta(t, S) \cdot \omega_z(t, S) dS dt \rightarrow \min, \quad (5)$$

при дифференциальных связях

$$\frac{\partial [\chi]_0(t, S)}{\partial t} + \frac{\partial [\chi]_{1q}(S)}{\partial S} = \frac{\partial ([\chi]_{1q}(S) \cdot U_\delta(t, S))}{\partial S},$$

при ограничениях вдоль траектории на фазовые переменные $[\chi]_0(t, S)$, определенные емкостью накопителей

$$0 \leq [\chi]_0(t, S), [\chi]_0(t, S) \leq [\chi]_{0G}(S),$$

при ограничениях вдоль траектории на управление [6]

$$0 \leq \int_{t_q - 0.5\Delta t_q}^{t_q + 0.5\Delta t_q} U_\delta(t, S) dt \leq U_{\delta G}(S) = 8 (\text{ч/смена}), \quad (6)$$

$$\Delta t_q \rightarrow 0, \quad 0 \leq U_\delta(t, S),$$

начальных условиях

$$[\chi]_0(0, S) \leq [\chi]_{00}(S),$$

конечном состоянии (цель управления)

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

$$[\chi]_0(T_d, S) \leq [\chi]_{0T_d}(S)$$

и граничных условиях

$$[\chi]_1(t, 0) = [\chi]_{1q}(0),$$

$$[\chi]_1(t, S_d) = [\chi]_{1q}(S_d),$$

где $t_q = 8 \cdot q$ – время окончания q -ой рабочей смены; $\delta(t - t_q)$ – дельта функция. Управление осуществляется в интервале времени между сменами

$$0 < t_1 < t_2 \dots < t_q \dots \leq t_d, \Delta t_q \rightarrow 0.$$

Управление $U_\delta(t, S)$ следует понимать как некоторый импульс, являющийся идеализацией достаточно большого по величине обычного управления в течение смены, сосредоточенного в окрестности точки t_q [3]. Значение функции $U_\delta(t, S)$ в момент времени t задает количество часов работы дополнительного оборудования в месте технологического маршрута с координатой S . Условие (6) для разных участков маршрута записано в предположении того, что длительность работы дополнительного оборудования не может превышать длительности технологической смены, равной восьми часам.

Темп обработки предметов труда вдоль технологического маршрута есть заданная функция

$$[\chi]_{1q} = [\chi]_{1q}(S)$$

от координаты S . Темп движения предметов труда

$$[\chi]_1(t, 0) = [\chi]_{1q}(0),$$

поступающих в виде заготовок сырья и материалов на поточную линию, и темп

$$[\chi]_1(t, S_d) = [\chi]_{1q}(S_d)$$

готовых деталей, выходящих с последней операции, не зависят от времени, согласованы с планом снабжения производственного участка сырьем и планом отгрузок готовой продукции. Функционал (5) определяет критерий ка-

чества управления потоковыми параметрами за время производственного цикла T_d , отражает сверхнормативные затраты по всем технологическим операциям, связанным с использованием дополнительного оборудования. При этом предполагается, что стоимость часа работы дополнительного оборудования задана разной для каждой операции и зависит от времени, определена функцией $\omega_z(t, S)$. При определении оптимальной программы управления считаем, что интервалы между сменами примыкают друг к другу. Предполагаем, что основное оборудование в течение рабочей смены работает непрерывно. Для обеспечения условий непрерывности потока предметов труда по технологическому маршруту

$$[\chi]_{0G}(S) \geq [\chi]_0(t, S) \geq 0,$$

управление работой дополнительного оборудования необходимо производить таким образом, чтобы в течение смены в интервале $t \in [t_q, t_{q+1}]$ основное оборудование функционировало непрерывно. Строгое равенство

$$[\chi]_{0G}(S) \equiv [\chi]_0(t, S)$$

и

$$[\chi]_0(t, S) \equiv 0,$$

соответствующее заполнению предметами труда накопителя и опустошению его, допускается только в интервале времени

$$t \in \left[t_q - \frac{\Delta t_q}{2}, t_q + \frac{\Delta t_q}{2} \right], \Delta t_q \rightarrow 0.$$

Проинтегрировав уравнения баланса в указанном интервале времени, получим:

$$[\chi]_0 \left(t_{q+1} - \frac{\Delta t_q}{2}, S \right) = [\chi]_0 \left(t_q - \frac{\Delta t_q}{2}, S \right) -$$

$$-\frac{\partial [\chi]_{1q}(S)}{\partial S} \delta - \frac{\partial}{\partial S} \int_{t_q - \frac{\Delta t_q}{2}}^{t_q + \frac{\Delta t_q}{2}} [\chi]_{1q}(S) U_\delta(t, S) dt$$

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

что позволяет записать условие недопустимости переполнения межоперационного накопителя

$$[\chi]_{0G}(S) - [\chi]_0\left(t_q - \frac{\Delta t_q}{2}, S\right) - \frac{\partial[\chi]_{1q}(S)}{\partial S} \delta + \\ + \frac{\partial}{\partial S} \int_{t_q - \frac{\Delta t_q}{2}}^{t_q + \frac{\Delta t_q}{2}} [\chi]_{1q}(S) U_\delta(t, S) dt \geq 0$$

и условие недопустимости опустошения межоперационного накопителя

$$[\chi]_0\left(t_q - \frac{\Delta t_q}{2}, S\right) - \frac{\partial[\chi]_{1q}(S)}{\partial S} \delta - \\ - \frac{\partial}{\partial S} \int_{t_q - \frac{\Delta t_q}{2}}^{t_q + \frac{\Delta t_q}{2}} [\chi]_{1q}(S) U_\delta(t, S) dt \geq 0.$$

Функция $[\chi]_0(t_q, S)$ определяет распределение предметов труда по технологическому маршруту в момент времени $t = t_q$, соответствующий началу q -ой смены. Управление $U_\delta(t, S)$ при ограничениях на фазовые переменные и при ограничениях на управление, обеспечивает достижение цели управления при минимальном значении интеграла (5) и при заданных дифференциальных связях, является оптимальной программой для потоковых параметров производственной линии. В отсутствие управления уравнение связей имеет вид (1). Изменение количества предметов труда на участке поточной линии в пределах операции возможно только за счет поступления предметов труда с предыдущей операции и ухода их на последующую в результате технологической обработки. Слагаемое

$$\frac{\partial([\chi]_{1q}(S) \cdot U_\delta(t, S))}{\partial S},$$

содержащее управление $U_\delta(t, S)$, играет роль источника или стока [1] предметов труда в рассматриваемом элементе объема фазового пространства. Начальные условия и цель управле-

ния определяют распределение предметов труда по маршруту в начальный и конечный момент времени.

Научная новизна и практическая значимость

Научная новизна заключается в разработке метода проектирования систем управления параметрами производственной линии предприятий с поточным методом организации производства, основанном на PDE-модели объекта управления.

При этом объект управления – производственная поточная линия, представлен динамической системой с распределенными параметрами вдоль технологического маршрута. Оптимальное управление параметрами поточной линии ищется в виде суперпозиций дельта функций.

Предложенный метод проектирования системы управления потоковыми параметрами производственной линии может быть положен в основу проектирования высокоэффективных систем управления потоковыми параметрами производства для предприятий по изготовлению полупроводниковой продукции автомобильной отрасли.

Выводы

Длительность производственного цикла T_d обработки партии предметов труда можно разбить на три характерные части:

T_H – промежуток времени между событиями, когда была начата обработка первого предмета труда на первой операции и закончена обработка первого предмета труда на последней операции (нестационарный режим работы поточной линии);

T_{Cm} – промежуток времени между событиями, когда была закончена обработка первого предмета труда на последней операции и начата обработка последнего предмета труда на первой операции;

T_K – промежуток времени между событиями, когда была начата обработка последнего предмета труда на первой операции и закончена обработка последнего предмета труда на по-

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

следней операции (нестационарный режим работы поточной линии):

$$T_d = T_H + T_{Cm} + T_K. \quad (7)$$

В течение промежутка времени T_H осуществляется заполнение всех технологических позиций поточной линии поступившими на обработку предметами труда k -ой партии, что приводит к переходному нестационарному режиму функционирования. Если производственная линия обрабатывает предыдущую $(k-1)$ -ую партию изделий, то время переходного периода T_H для k -ой партии может быть оценено величиной

$$\begin{aligned} \tau_{m,(k-1)} \cdot \sum_{m=1}^M N_{m,(k-1)} &\leq T_H \leq \\ &\leq \tau_{\max,(k-1)} \sum_{m=1}^M N_{m,(k-1)} + \sum_{m=1}^M \tau_{m,(k-1)}. \end{aligned} \quad (8)$$

где $\tau_{m,(k-1)}$ – эффективное время обработки предмета труда $(k-1)$ -ой партии изделий на m -ой операции ($m=1..M$), $N_{m,(k-1)}$ – количество предметов труда $(k-1)$ -ой партии в m -ом межоперационном накопителе.

Для синхронизированной производственной линии промежуток времени T_H принимает минимальное значение, равное

$$T_H = \tau_{m,(k-1)} \cdot \sum_{m=1}^M N_{m,(k-1)}. \quad (9)$$

После заполнения всех технологических позиций поступившими на обработку предметами труда k -ой партии производственная линия может функционировать как в установившемся, так и в переходном режиме, что определяется заданным изменением во времени темпа обработки предметов труда на разных операциях. Промежуток времени T_K характеризует требуемое время переходного нестационарного про-

цесса для освобождения производственной линии от изделий k -ой партии, может быть вычислен по формуле (8).

Движение первого предмета труда обрабатываемой k -ой партии ограничено движением предмета труда предыдущей $(k-1)$ -ой партии изделий. Для уменьшения времени переходного режима T_H необходимо ускорить обработку изделий предыдущей партии. Для линий, удовлетворяющих условию $T_d \gg T_H$, затратами на управление в этот промежуток времени можно пренебречь. Если промежуток времени T_H достаточно велик или затраты на управлении потоковыми параметрами в промежутке T_H существенны, то для сокращения времени производственного цикла T_d необходимо управление на операциях, на которых находятся предметы труда предшествующей партии. Освобождение оборудования для исследуемой партии деталей сокращает длительность T_H . Вопрос о необходимости управления в течение времени $t \in [0, T_H]$ определяется условием (7) при дополнительных уравнениях и неравенствах вида (5).

Достижение производственной системой с начальным распределением предметов труда $[\chi]_{00}(S)$ по технологическому маршруту поточной линии за время продолжительности производственного цикла T_d конечного состояния $[\chi]_{0T_d}(S)$ может быть реализовано множеством способов, каждый из которых именуется программой управления. В технических задачах управления состоянием производственной линии возникает вопрос о нахождении наиболее оптимальной программы использования ресурсов (оптимального управления). Математическое отражение этого факта состоит в том, что управление параметрами поточной линии должно быть выбрано из условия минимума интеграла (5).

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Азаренков, Н. А. Кинетическая теория колебаний параметров поточной линии / Н. А. Азаренков, О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Доп. Нац. акад. наук України. – 2014. – № 12. – С. 36–43. doi: 10.15407/dopovidi2014.12.036
2. Власов, В. А. Моделирование технологических процессов изготовления промышленной продукции / В. А. Власов, И. А. Тихомиров, И. И. Локтев. – Томск : Изд-во ГТПУ, 2006. – 300 с.
3. Дыхта, В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк. – Москва : Физматлит, 2000. – 255 с.
4. Иваненко, Д. Д. Классическая теория поля (новые проблемы) / Д. Д. Иваненко, А. А. Соколов. – Москва ; Ленинград : Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1951. – 480 с.
5. Коробецкий, Ю. П. Имитационные модели в гибких системах / Ю. П. Коробецкий, С. К. Рамазанов. – Луганск : Изд-во ВНУ им. В. Даля, 2003. – 280 с.
6. Михайлов, В. С. Теория управления / В. С. Михайлов. – Киев : Выща школа, 1988. – 312 с.
7. Пигнастый, О. М. Задача оптимального оперативного управления макропараметрами производственной системы с массовым выпуском продукции / О. М. Пигнастый // Доп. Нац. акад. наук України. – 2006. – № 5. – С. 79–85.
8. Пигнастый, О. М. Расчет производственного цикла с применением статистической теории производственно-технических систем / О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов // Доп. Нац. акад. наук України. – 2009. – № 12. – С. 38–44.
9. Online scheduling of 2re-entrant flexible manufacturing systems / J. Pinxten, U. Waqas, M. Geilen, A. Basten, L. Somers // ACM Transactions on Embedded Computing Systems. – 2017. – Vol. 16. – Iss. 5s. – P. 1–20. doi: 10.1145/3126551
10. On the Optimization of Conservation Law Models at a Junction with Inflow and Flow Distribution Controls / F. Ancona, A. Cesaroni, G. Coclite, M. Garavello // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2018. – Vol. 56. – Iss. 5. – P. 3370–3403. doi: 10.1137/18M1176233
11. Simulation model study for manufacturing effectiveness evaluation in crowdsourced manufacturing / T. Kaihara, Y. Katsumura, Y. Suginishi, B. Kádár // CIRP Annals. – 2017. – Vol. 66. – Iss. 1. – P. 445–448. doi: 10.1016/j.cirp.2017.04.094
12. Situation Awareness and Environmental Factors: The EVO Oil Production / M. de Falco, N. Mastrandrea, W. Mansoor, L. Rarità // New Trends in Emerging Complex Real Life Problems / P. Daniele, L. Scrimali (eds). – Cham : Springer, 2018. – P. 209–217. doi: 10.1007/978-3-030-00473-6_23
13. Tiacci, L. Simultaneous balancing and buffer allocation decisions for the design of mixed-model assembly lines with parallel workstations and stochastic task times / L. Tiacci // International Journal of Production Economics. – 2015. – Vol. 162. – P. 201–215. doi: 10.1016/j.ijpe.2015.01.022
14. Towards adaptive simulation-based optimization to select individual dispatching rules for production control / M. Kück, E. Broda, M. Freitag, T. Hildebrandt, E. M. Frazzon // 2017 Winter Simulation Conference (WSC). – Las Vegas, NV, USA, 2017. – P. 3852–3863. doi: 10.1109/WSC.2017.8248096

Г. К. КОЖЕВНИКОВ¹, О. М. ПІГНАСТІЙ^{2*}

¹Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», вул. Пушкінська, 79-2, Харків, Україна, 61002, тел. +38 (050) 776 88 79, ел. пошта kgk4711@gmail.com, ORCID 0000-0002-6586-6767

^{2*}Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», вул. Пушкінська, 79-2, Харків, Україна, 61002, тел. +38 (067) 572 50 29, ел. пошта pihnastyi@gmail.com, ORCID 0000-0002-5424-9843

РОЗПОДІЛЕНА ДИНАМІЧНА PDE-МОДЕЛЬ ПРОГРАМНОГО КЕРУВАННЯ ЗАВАНТАЖЕННЯМИ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ОБЛАДНАННЯ ВИРОБНИЧОЇ ЛІНІЇ

Мета. У роботі необхідно розглянути проектування системи управління параметрами виробничої лінії для підприємства з потоковим методом організації виробництва. **Методика.** Виробнича лінія підприємства з потоковим методом організації виробництва – це складна динамічна розподілена система. Технологічний

Creative Commons Attribution 4.0 International

doi: 10.15802/stp2019/159489

© Г. К. Кожевніков, О. М. Пигнастый, 2019

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

шлях виготовлення продукції для багатьох сучасних підприємств містить кілька сотень технологічних операцій, в міжопераційному резерві кожної з яких є тисячі продуктів, що чекають на обробку. Технологічні маршрути різних деталей одного виду виробів перетинаються. Це призводить до того, що розподіл предметів праці уздовж технологічного маршруту значно впливає на пропускну здатність виробничої лінії. Для опису таких систем введений новий клас моделей виробничих ліній (PDE-model). Моделі цього класу використовують рівняння в частинних похідних для опису поведінки потокових параметрів виробничої лінії. У цій статті побудована PDE-модель виробничої лінії, потокові параметри якої залежать від величини коефіцієнта завантаження технологічного обладнання для кожної операції. **Результати.** Автори отримали оптимальне управління потоковими параметрами виробничої лінії, в основу покладено алгоритм зміни коефіцієнта завантаження технологічного обладнання виробничої лінії. Як базовий нормативний режим функціонування потокової лінії розглянуто однозмінний режим роботи. **Наукова новизна** полягає в розробці методу проектування систем управління параметрами виробничої лінії підприємств із потоковим методом організації виробництва, заснованого на PDE-моделі об'єкта управління. Автори запропонували метод побудови оптимального управління параметрами потокової лінії через управління коефіцієнтом завантаження технологічного обладнання. Під час проектування системи управління потокова лінія представлена динамічною розподіленою системою. **Практична значимість.** Запропонований метод проектування системи управління потоковими параметрами виробничої лінії може бути покладено в основу проектування високоефективних систем управління потоковими параметрами виробництва для підприємств із виготовлення напівпровідникової продукції автомобільної галузі.

Ключові слова: конвеєр; виробничі лінії; PDE-модель виробництва; системи управління виробництвом; незавершене виробництво; масове виробництво

G. K. KOZEVNIKOV¹, O. M. PIHNASTYI^{2*}

¹National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Pushkinska St., 79-2, Kharkiv, Ukraine, 61002, tel. +38 (050) 776 88 79, e-mail kgk4711@gmail.com, ORCID 0000-0002-6586-6767

^{2*}National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Pushkinska St., 79-2, Kharkiv, Ukraine, 61002, tel. +38 (067) 572 50 29, e-mail pihnastyi@gmail.com, ORCID 0000-0002-5424-9843

DISTRIBUTED DYNAMIC PDE-MODEL OF PROGRAM CONTROL BY UTILIZATION OF THE TECHNOLOGICAL EQUIPMENT OF PRODUCTION LINE

Purpose. The article is aimed at designing a control system for the parameters of a production line for an enterprise with a straight flow method of organizing production. **Methodology.** The production line at the enterprise with a straight flow method of organizing production is a complex dynamic distributed system. The flow route for manufacturing a product for many modern enterprises contains several hundreds of technological operations, in the inter-operating reserve each of which there are thousands of products waiting to be processed. The flow routes of different parts of the same type of products intersect (re-entrant manufacturing systems). This leads to the fact that the distribution of subjects of labor along the technological route has a significant impact on the throughput capacity of the production line. To describe such systems, a new class of production line models (PDE-model) has been introduced. To describe the behavior of the flow parameters of the production line, a production line model containing partial differential equations (PDE-model) was used. The PDE-model of the production line is built in the article, the flow parameters of which depend on the value of utilization rate of the technological equipment for each operation. **Findings.** The authors obtained the optimal control of the flow parameters of the production line, which is based on the algorithm for changing the utilization rate of the technological equipment of the production line. The single-shift working time pattern is considered as a basic regulatory treatment of the production line operation. To simulate the work of technological equipment after the shift, the generalized Dirac function was used. **Originality** consists in the development of a method for designing control systems for the parameters of the production line of enterprises with a straight flow method of organizing production based on the PDE-model of the control object. The authors proposed a method for constructing an optimal control of the parameters of the production line through the control of the utilization rate of the technological equipment. When designing a control system, the production line is represented by a dynamic system with distributed flow parameters. **Practical value.** The proposed method for designing

ІНФОРМАЦІЙНО-КОМУНІКАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

a control system for the flow parameters of a production line can be used as the basis for designing highly efficient production flow control systems for enterprises manufacturing semiconductor products of the automobile industry.

Keywords: conveyor; production line; PDE-model of production; production control systems; unfinished production; mass production

REFERENCES

1. Azarenkov, N. A., Pihnastyi, O. M., & Khodusov, V. D. (2014). Kinetic theory of fluctuations of the parameters of a production line. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (12), 36-43. doi: 10.15407/dopovidi2014.12.036 (in Russian)
2. Vlasov, V. A., Tikhomirov, I. A., & Loktev, I. I. (2006). *Modelirovanie tekhnologicheskikh protsessov izgotovleniya promyshlennoy produktsii*. Tomsk: Izdatelstvo GTPU. (in Russian)
3. Dykhata, V. A., & Samsonyuk, O. N. (2000). *Optimalnoe impulsnoe upravlenie s prilozheniyami*. Moscow: Fizmatlit. (in Russian)
4. Ivanenko, D. D., & Sokolov, A. A. (1951). *Klassicheskaya teoriya polya (novye problemy)*. Moscow: Gosudarstvennoe izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoy literatury. (in Russian)
5. Korobetskiy, Y. P., & Ramazanov, S. K. (2003). *Imitatsionnye modeli v gibkikh sistemakh*. Lugansk: Izdatelstvo VNU im. V. Dalya. (in Russian)
6. Mikhaylov, V. S. (1988). *Teoriya upravleniya*. Kiev: Vyshcha shkola. (in Russian)
7. Pihnastyi, O. M. (2006). Zadacha optimalnogo operativnogo upravleniya makroparametrami proizvodstvennoy sistemy s massovym vypuskom produktsii. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (5), 79-85. (in Russian)
8. Pihnastyi, O. M., & Khodusov, V. D. (2009). Raschet proizvodstvennogo tsikla s primeneniem statisticheskoy teorii proizvodstvenno-tekhnicheskikh sistem. *Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine*, (12), 38-44. (in Russian)
9. Pinxten, J. V., Waqas, U., Geilen, M., Basten, T., & Somers, L. (2017). Online Scheduling of 2-Re-entrant Flexible Manufacturing Systems. *ACM Transactions on Embedded Computing Systems*, 16(5s), 1-20. doi: 10.1145/3126551 (in English)
10. Ancona, F., Cesaroni, A., Coclite, G. M., & Garavello, M. (2018). On the Optimization of Conservation Law Models at a Junction with Inflow and Flow Distribution Controls. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 56(5), 3370-3403. doi: 10.1137/18m1176233 (in English)
11. Kaihara, T., Katsumura, Y., Suginishi, Y., & Kadar, B. (2017). Simulation model study for manufacturing effectiveness evaluation in crowdsourced manufacturing. *CIRP Annals*, 66(1), 445-448. doi: 10.1016/j.cirp.2017.04.094 (in English)
12. Falco de, M., Mastrandrea, N., Mansoor, W., & Rarità, L. (2018). Situation Awareness and Environmental Factors: The EVO Oil Production. In: P. Daniele, & L. Scrimali (eds), *New Trends in Emerging Complex Real Life Problems* (pp. 209-217). Cham: Springer. doi: 10.1007/978-3-030-00473-6_23 (in English)
13. Tiacci, L. (2015). Simultaneous balancing and buffer allocation decisions for the design of mixed-model assembly lines with parallel workstations and stochastic task times. *International Journal of Production Economics*, 162, 201-215. doi: 10.1016/j.ijpe.2015.01.022 (in English)
14. Kuck, M., Broda, E., Freitag, M., Hildebrandt, T., & Frazzon, E. M. (2017, December). Towards adaptive simulation-based optimization to select individual dispatching rules for production control. *2017 Winter Simulation Conference (WSC)*. Las Vegas. doi: 10.1109/wsc.2017.8248096 (in English)

Поступила в редколлегию: 16.08.2018

Принята к печати: 02.01.2019