УДК 517.518.2:629.4.014.6

А. А. БОСОВ (ДИИТ), Г. Н. КОДОЛА (УкрГХТУ)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ПАРЕТО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЦИОНАЛЬНОЙ КОМПОЗИЦИИ ПАССАЖИРСКОГО ПОЕЗДА

Розглянуто чисельний розв’язок задачі векторної оптимізації визначення раціональної композиції пасажирського поїзда за допомогою метода параметризації Парето рішення.

Рассмотрен численный пример решения задачи векторной оптимизации определения рациональной композиции пассажирского поезда с помощью метода параметризации Парето решения.

The numerical example of the vector-optimization problem decision for a definition rational passenger train composition with the help of a parametrization method Парето of the decision is considered.

Возникновение проблем в деятельности и развитии пассажирского хозяйства обусловлено рядом негативных факторов, а именно

– низкими тарифами на перевозку пассажиров и отсутствия действующего механизма компенсации убытков во время предоставления общественных услуг, которое приводит к перекрестному субсидированию убыточных пассажирских перевозок за счет грузовых;

– неэффективное использование пассажирского состава при организации пассажирских перевозок.

В современных условиях основным направлением стабилизации пассажирского комплекса является создание новой системы организации управления его хозяйственной деятельностью, а главными задачами этой системы должны быть

– комплексное управление затратами;

– глубокое и постоянное изучение рынка перевозок и запросов пассажиров.

Такая система наряду с удовлетворением запросов потребителей услуг позволит обеспечивать получение от данного вида деятельности максимальной прибыли и снижение себестоимости перевозок, а также сбалансировать интересы железных дорог и потребителей ее услуг.

Постановка задачи определения рациональной композиции пассажирского поезда представляет собой [1-2]:

Пусть по маршруту следования пассажирского поезда имеется n станций, включая станцию отправления и станцию прибытия. В случае, когда каждый тип вагонов рассматривается независимо, имеем

$f_{ij}(x,t)$ – плотность вероятностей распределения спроса на поездки из A_i в A_j в момент времени t (t – день недели);

$\xi_{ij}(t)$ – математическая модель спроса на поездки из $A_i \to A_j$ в момент t (при фиксированном t ξ_{ij} – случайная величина);

$y_{ij}(t)$ – число мест, которые могут быть проданы в A_i для поездки в A_j.

Функция потерь представляет собой

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} \left(y_{ij} F_{ij}(y_{ij}) - \int_{a_{ij}}^{y_{ij}} x f_{ij}(x) dx \right) + \\ + p_{ij} \left(\int_{y_{ij}}^{b_{ij}} x f_{ij}(x) dx - y_{ij}(1 - F_{ij}(y_{ij})) \right).$$

Функция прибыли имеет вид

$$F_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(p_{ij} \left(\int_{a_{ij}}^{y_{ij}} x f_{ij}(x) dx + y_{ij}(1 - F_{ij}(y_{ij})) \right) \right. \\ \left. - c_{ij} y_{ij} \right)$$

Желание сделать потери F_1 как можно меньше, а прибыль F_2 как можно больше приводит к задаче векторной оптимизации

$$\begin{pmatrix} F_1(Y) \\ -F_2(Y) \end{pmatrix} \to \min, \tag{1}$$

при условиях

$$\begin{cases} \sum_{j=3}^{n} y_{2j} \le y_{12} \\ \sum_{j=4}^{n} y_{3j} \le y_{13} + y_{23} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{j=i+1}^{n} y_{ij} \le \sum_{k=1}^{i-1} y_{ki} \\ Y \ge 0, \end{cases} \qquad (2)$$

где $Y = (y_{12}, y_{13}, ..., y_{1n}, y_{23}, y_{24}, ..., y_{2n}, ..., y_{n-1n})$.

Для решения поставленной задачи, назовем ее основной, разобьем ее на две подзадачи:

1. Решить задачу (1) без учета ограничений (2), применяя необходимое и достаточное условие решения задачи векторной оптимизации [3], для определения интервалов $y_{ij}(\lambda) \in [\underline{y}_{ij}, \overline{y}_{ij}]$.
2. Решение задачи (1) с ограничениями (2), путем применения метода параметризации Парето решения в задачах векторной оптимизации [4].

Необходимое и достаточное условие для решения задачи векторной оптимизации представляет собой:

$$\partial f_1(x) + \lambda \partial f_2(x) = 0, \; 0 < \lambda < \infty. \qquad (3)$$

Предположения о виде функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

1. выпуклы и непрерывны;
2. имеют непрерывные производные до второго порядка включительно.

Метод параметризации Парето решения в задачах векторной оптимизации представляет собой сведение исходной задачи векторной оптимизации к задаче типа (A) [4], математическая модель которой представляет собой

Формируется множество Y – множество ограничений:

$$Y = \{ y \in R_2 : h_i(y) \le 0, i = \overline{1,k} \} \qquad (4)$$

Вводится функция $H(y)$:

$$H(y) = \min_{1 \le i \le k} \{ h_i(y) \}. \qquad (5)$$

при чем имеет место

$$H(y) = \begin{cases} > 0, \text{ если } y \notin Y; \\ < 0, \text{ если } y \in Y; \\ = 0, \text{ если } y \in \text{ границе } Y. \end{cases}$$

и исходная задача сводится к задаче

$$L = t \to \min \qquad (A)$$

при условии

$$H(u \cdot t) = 0,$$

где вектор u имеет координаты

$$\begin{cases} u_1 = \cos\varphi, \\ u_2 = \sin\varphi, \end{cases} \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2},$$

а точка A, лежащая на луче, порождаемым вектором u имеет координаты

$$\begin{cases} y_{1A} = u_1 \cdot t; \\ y_{2A} = u_2 \cdot t, \end{cases} \quad 0 \le t.$$

Для применения необходимого и достаточного условия решения задачи векторной оптимизации покажем, что функции F_1 и F_2 являются выпуклыми.

Для выпуклости функций необходимо проверить следующие два условия [5]:

1. первая производная должна менять знак с «–» на «+»;
2. вторая производная должна быть положительна.

Для функции потерь

$$F_1 = c\int_a^y (y - x) f(x)dx + p\int_y^b (x - y) f(x)dx$$

первая производная с учетом $\int_a^b f(x)dx = 1$ имеет вид

$$F_1' = c - (p + c)\int_y^b f(x)dx.$$

Вторая производная определяется как

$$F_1'' = (p + c) f(y).$$

В случае использования равномерного закона для распределения спроса, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \; x \notin [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a}, \; x \in [a,b] \end{cases},$$

имеем $F_1'' = (p + c) f(y) > 0$,

т. е. функция потерь выпуклая.

Для функции прибыли исследуем на выпуклость функцию $-F_2$:

$$-F_2 = cy - p\left(\int_a^y xf(x)dx + y\int_y^b f(x)dx\right);$$

первая производная

$$F_2' = c - p\left(yf(y) + \int_y^b f(x)dx - yf(y)\right) =$$

$$= c - p\int_y^b f(x)dx,$$

т. к. $c < p$ и $F_2'' = pf(x) > 0$, то функция $-F_2$ также является выпуклой.

Из выпуклости функций F_1 и $-F_2$ следует, что для решения задачи векторной оптимизации (1) можно применить теорему необходимого и достаточного условия решения задачи векторной оптимизации.

Легко убедиться, что решение задачи (1) при заданной плотности распределения спроса по равномерному закону не выходит за пределы интервала $[a,b]$, т. е. $y \in [a,b]$.

В случае, когда на пути следования имеется n станций (включая станции отправления и прибытия), функция потерь F_1 (в случае, когда $f(x)$ представляет собой плотность распределения спроса по равномерному закону) имеет вид

$$F_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\frac{1}{b_{ij} - a_{ij}}\left((p_{ij} + c_{ij})\frac{y_{ij}^2}{2} - y_{ij}(p_{ij}b_{ij} + c_{ij}a_{ij}) + \frac{c_{ij}a_{ij}^2 + p_{ij}b_{ij}^2}{2}\right)\right),$$

а функция прибыли F_2 представляет собой

$$F_2 = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\left(\frac{p_{ij}}{b_{ij} - a_{ij}}\left(-\frac{y_{ij}^2}{2} + y_{ij}b_{ij} - \frac{a_{ij}^2}{2}\right) - c_{ij}y_{ij}\right).$$

При $n = 3$, ограничения имеют вид

$$\begin{cases} y_{12} + y_{13} \le N, \\ y_{23} \le y_{12}. \end{cases}$$

Область допустимых значений y_{12}, y_{13}, y_{23} представляет собой (рис. 1)

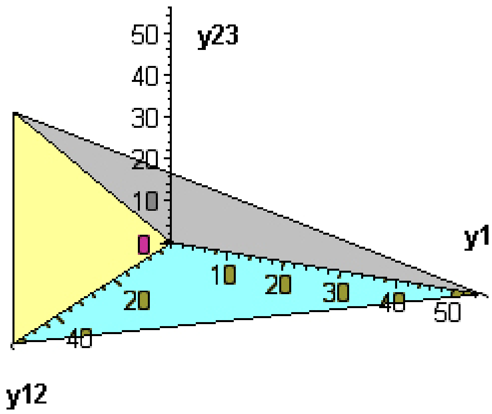

Рис. 1. Область допустимых значений y_{12}, y_{13}, y_{23}

Применяя теорему необходимого и достаточного условия решения задачи векторной оптимизации (3) для нашего случая имеем

$$\frac{-\partial F_2}{\partial y_{ij}} + \lambda\frac{\partial F_1}{\partial y_{ij}} = 0$$

или

$$-\left[\frac{p_{ij}}{b_{ij} - a_{ij}}(-y_{ij} + b_{ij}) - c_{ij}\right] +$$

$$+\lambda\left[\frac{1}{b_{ij} - a_{ij}}\left((p_{ij} + c_{ij})y_{ij} - (p_{ij}b_{ij} + c_{ij}a_{ij})\right)\right] = 0.$$

откуда

$$y_{ij} = \frac{p_{ij}b_{ij} - c_{ij}(b_{ij} - a_{ij}) + \lambda(p_{ij}b_{ij} + c_{ij}a_{ij})}{p_{ij} + \lambda(p_{ij} + c_{ij})}.$$

При $\lambda = 0$, точка, где функция прибыли принимает максимальное значение

$$\underline{y}_{ij} = b_{ij} - \frac{c_{ij}}{p_{ij}}(b_{ij} - a_{ij}).$$

При $\lambda \to \infty$, точка, в которой функция потерь принимает минимальное значение

$$\overline{y}_{ij} = \frac{p_{ij}b_{ij} + c_{ij}a_{ij}}{p_{ij} + c_{ij}} = b_{ij} - \frac{c_{ij}}{p_{ij} + c_{ij}}(b_{ij} - a_{ij}).$$

Так как $\frac{c_{ij}}{p_{ij}} < 1$, то $\underline{y}_{ij} < \overline{y}_{ij}$.

Покажем, что решение $y_{ij}(\lambda) \in [\underline{y}_{ij}, \overline{y}_{ij}]$.

Для этого покажем, что $y_{ij}(\lambda) \ge \underline{y}_{ij}$ и $y_{ij}(\lambda) \le \overline{y}_{ij}$.

В первом случае имеем

$$\frac{p_{ij}b_{ij} - c_{ij}(b_{ij} - a_{ij}) + \lambda(p_{ij}b_{ij} + c_{ij}a_{ij})}{p_{ij} + \lambda(p_{ij} + c_{ij})} \geq$$

$$\geq b_{ij} - \frac{c_{ij}}{p_{ij}}(b_{ij} - a_{ij}) \qquad ;$$

$$p_{ij}b_{ij} - c_{ij}(b_{ij} - a_{ij}) + \lambda(p_{ij}b_{ij} + c_{ij}a_{ij}) \geq$$

$$\geq \left(b_{ij} - \frac{c_{ij}}{p_{ij}}(b_{ij} - a_{ij})\right) \cdot \left(p_{ij} + \lambda(p_{ij} + c_{ij})\right),$$

при $p_{ij} + \lambda(p_{ij} + c_{ij}) \neq 0$, т. е. $\lambda \neq \frac{p_{ij}}{p_{ij} + c_{ij}}$.

$$\lambda \cdot (p_{ij}b_{ij} + c_{ij}a_{ij}) -$$

$$\lambda(p_{ij} + c_{ij}) \cdot \left(b_{ij} - \frac{c_{ij}}{p_{ij}}(b_{ij} - a_{ij})\right) \geq 0 \qquad ;$$

неравенство выполняется если

а) $(p_{ij}b_{ij} + c_{ij}a_{ij}) -$

$$-(p_{ij} + c_{ij}) \cdot \left(b_{ij} - \frac{c_{ij}}{p_{ij}}(b_{ij} - a_{ij})\right) \geq 0 \text{ и } \lambda > 0$$

или

б) $(p_{ij}b_{ij} + c_{ij}a_{ij}) -$

$$-(p_{ij} + c_{ij}) \cdot \left(b_{ij} - \frac{c_{ij}}{p_{ij}}(b_{ij} - a_{ij})\right) \leq 0 \text{ и } \lambda < 0.$$

Для случая (а) рассмотрим первое неравенство, проделав в нем преобразование, получим $\frac{c_{ij}^2}{p_{ij}}(b_{ij} - a_{ij}) \geq 0$, что является истиной, т. к. $b_{ij} \geq a_{ij}$ и $\frac{c_{ij}^2}{p_{ij}} \geq 0$, и приводит к противоречию в случае (б). Отсюда следует, что $y_{ij}(\lambda) \geq \underline{y}_{ij}$ выполняется при $\lambda > 0$ и $\lambda \neq \frac{p_{ij}}{p_{ij} + c_{ij}}$.

Аналогичным образом показывается, что $y_{ij}(\lambda) \leq \overline{y}_{ij}$.

Таким образом, $y_{ij}(\lambda) \in [\underline{y}_{ij}, \overline{y}_{ij}]$ при $0 \leq \lambda < \infty$, при чем $\lambda \neq \frac{p_{ij}}{p_{ij} + c_{ij}}$.

Рассмотрим численный пример.

Пусть $n = 3$.

Минимальный спрос на поездки по станциям отобразим в матрице A, каждый элемент которой представляет собой минимальный спрос из i-ой станции (где i – номер строки) до j-ой станции (где j – номер столбца).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Максимальный спрос на поездки по станциям отобразим в матрице B, каждый элемент которой представляет собой максимальный спрос из i-ой станции (где i – номер строки) до j-ой станции (где j – номер столбца).

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 35 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Количество мест в поезде $N = 55$.

Рентабельность принимаем равной 30 %, т. е. $\rho = 1{,}3$.

Цена за проезд из i-ой станции до j-ой станции отобразим в матрице P

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для нашего примера целевые функции имеют вид:

Функция потерь:

$$F_1(y_{12}, y_{13}, y_{23}) = 0{,}059y_{12}^2 - 1{,}5897y_{12} +$$
$$+0{,}0708y_{13}^2 - 3{,}4154y_{13} + 0{,}0983y_{23}^2 -$$
$$-1{,}1966y_{23} + 71{,}6496$$

Функция прибыли:

$$F_2(y_{12}, y_{13}, y_{23}) = -0{,}0333y_{12}^2 + 0{,}5641y_{12} - .$$
$$-0{,}04y_{13}^2 + 1{,}2615y_{13} - 0{,}0556y_{23}^2 +$$
$$+0{,}3419y_{23} - 4{,}8889.$$

Ограничения представляют собой

$$\begin{cases} y_{12} \geq y_{23}, \\ y_{12} + y_{13} \leq N \end{cases}.$$

Для решения первой подзадачи, т. е. определения интервалов $y_{ij}(\lambda) \in [\underline{y}_{ij}, \overline{y}_{ij}]$. составим систему уравнений, используя условие (3).

$$\begin{cases} \lambda(0.1179y_{12} - 1.5897) + \frac{1}{15}y_{12} - 0.5641 = 0, \\ \lambda(0.1415y_{13} - 3.4154) + \frac{2}{25}y_{13} - 1.2615 = 0, \\ \lambda(0.1966y_{23} - 1.1966) + \frac{1}{9}y_{23} - 0.3419 = 0; \end{cases}$$

Решив систему, получим

$$y_{12}(\lambda) = \frac{0.3 \cdot (7948717945 + 2820512819\lambda)}{176923077 + 100000000\lambda};$$

$$y_{13}(\lambda) = \frac{2 \cdot (3415384615 + 1261538462\lambda)}{283076923 + 160000000\lambda};$$

$$y_{23}(\lambda) = \frac{3.6 \cdot (5982905980 + 1709401709\lambda)}{3538461537 + 2000000000\lambda}.$$

Определим интервалы $y_{ij}(\lambda) \in [\underline{y}_{ij}, \overline{y}_{ij}]$.

$$y_{12}(\lambda) \in [8.4615,\ 13.4783];$$

$$y_{13}(\lambda) \in [15.7692,\ 24.1304];$$

$$y_{23}(\lambda) \in [3.0769,\ 6.087].$$

Переходим к решению задачи векторной оптимизации с ограничениями, путем сведения ее к задаче типа (А).

Сформируем функции h_i, $i = \overline{1,2}$.

$$h_1 = -y_{12}(\lambda) + y_{23}(\lambda);$$

$$h_2 = y_{12}(\lambda) + y_{13}(\lambda) - 55.$$

Функция H задачи (А) представляет собой:

$$H = \min(h_1, h_2).$$

Решение данной задачи отобразим графически, где множество Парето – решение данной задачи, представлено на графике отрезком внутри области допустимых значений (рис. 2).

Полученное решение $y_{ij}(\lambda)$ удовлетворяет построенным интервалам, полученным при решении первой подзадачи.

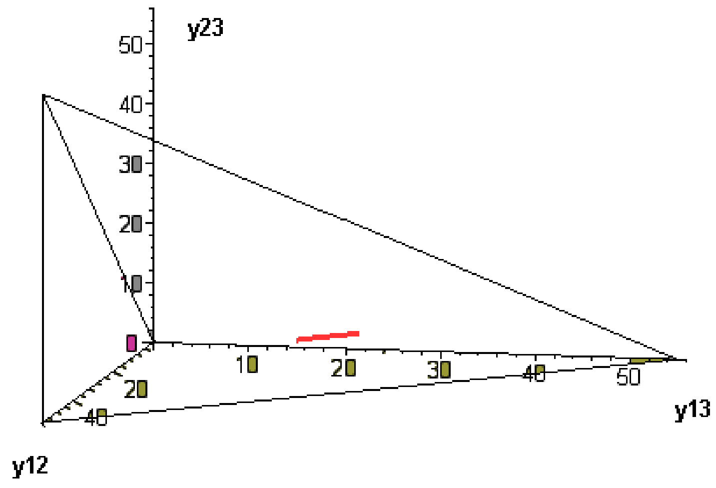

Рис. 2. Решение задачи

Процедура решения задачи векторной оптимизации определения рациональной композиции пассажирского поезда при количестве станций равное трем (т. е. при наличии одной промежуточной станции) с использование метода параметризации Парето решения для задачи векторной оптимизации эффективна и дает предпосылки применения ее к решению задачи с более, чем одной промежуточной станцией.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аксенов И. М. Математическая модель композиции пассажирских составов / И. М. Аксенов, Г. Н. Кодола, Е. А. Момот. // Залізн. трансп. України. – 2005.– № 1. – С 47-50.
2. Босов А. А. Определение эффективной структуры пассажирского поезда / А. А. Босов, Е. А. Момот // Вісник ДНУЗТ. – Д.: ДІІТ. – 2003. – Вип. 1. – С. 91-95.
3. Босов А. А. Задача векторной оптимизации одномерных выпуклых функций / А. А. Босов, Г. Н. Кодола, Л. Н. Савченко. // Зб. наук. пр. Київського ін-ту залізн. трансп.
4. Босов А. А. Векторная оптимизация по двум показателям / А. А. Босов, Г. Н. Кодола, Л. Н. Савченко. // Вісник ДНУЗТ. – Д.: ДИИТ, 2007. – № 18.
5. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.

Поступила в редакцию 25.09.2007.