УДК 519.1, 519.45

В. М. ІЛЬМАН, В. В. СКАЛОЗУБ, В. І. ШИНКАРЕНКО (ДІІТ)

# УТВОРЮЮЧІ СИСТЕМИ ГРАФІВ

Розглянуто алгебраїчний підхід до побудови утворюючих систем графів і запропоновано алгоритм створення таких утворюючих систем для графів заданого класу.

Рассмотрен алгебраический подход к построению образующих систем графов и предложен алгоритм создания таких образующих систем для графов заданного класса.

It is considered the algebraic approach to the constructing of the systems, which are deriving the graphs, and offered the algorithm to the solving of this problem.

## Вступ

Різноманітні прикладні задачі на транспорті в багатьох випадках призводять до розгляду графових моделей, що може породжувати задачі: побудови утворюючих систем графів, відтворення графів за їх підграфами та інші. Наприклад, при плануванні робіт локомотивних бригад необхідно вибрати таку систему утворюючих робіт, за допомогою яких можна було б побудувати будь який графік робіт цих бригад. Задачі такого типу приводять до пошуку алгоритму побудови утворюючих систем графів робіт, планів тощо. За допомогою алгоритму побудови утворюючих систем графів можуть бути розв'язані наступні задачі: відтворення транспортного потоку вантажних перевезень за відомими транспортними потоками на окремих ділянках залізниці, відтворення розподілу активного коштовного ресурсу транспортної галузі за відомими частковими розподілами долей цього ресурсу, та інші.

Проблеми побудови утворюючих систем структур-графів виникають також при розв'язанні деяких задач штучного інтелекту: розпізнання образів, побудови формальних граматик і алгоритмів тощо. Так, при створені формальної мови, орієнтованої на деякий клас алгоритмів, необхідно визначити утворюючі оператори, за допомогою яких повинен представлятися будь який алгоритм цього класу.

Питання пов'язані із вирішенням проблем побудови утворюючих систем математичних об'єктів не проходили повз уваги дослідників. Достатньо згадати класичну проблему функцій логіки для утворюючих замкнутих класів, успішно розв'язану Постом [1], проблему відтворення алгебри за системою утворюючих підалгебр [2]. Розв'язання проблем утворюючих систем об'єктів пов'язане з розробкою ефективних алгоритмів відтворення цих об'єктів.

У статті запропоновано алгоритм для розв'язання проблеми побудови графу за його системами утворюючих елементів. Здійснити відтворення графу можна за однозначно визначеними шляхами або за його підграфами, нижче розглянуто ці дві можливості. В основу розв'язання проблеми утворюючих систем графів покладено алгебраїчний підхід [1; 3].

## Шляхи, ланцюжки та їх структури

За звичаєм, якщо позначити через $C=\{c_i; i\in I\}$ деякий скінчений алфавіт, як множину вершин, а через $D$ − множину кортежів $\{(c_i,c_j)\in C^2; i,j\in I\}$ і ввести алфавіт $E'=\{e_j; j\in J\}$ з порожнім символом $\varepsilon$ як множину позначок відношень на множині кортежів, тоді отримаємо орієнтований навантажений граф представлений упорядкованою трійкою $G=\langle C,D,E'\rangle$ [4]. Відношення між кортежами і позначками дуг взагалі не взаємно однозначне. Якщо ввести множину $E=\{e_{jks}=(e_j,c_k,c_s);\ j\in J,\ e_j\in E',\ (c_k,c_s)\in D\}$, відношення між множинами $D$ і $E$ будуть взаємно однозначними, при умові, що будь який кортеж з $D$ не має однакових позначок. Не порожня послідовність кортежів $(c_{i_k},c_{i_{k+1}})\in D$ графу $G$ утворює шлях $P=((c_{i_1},c_{i_2}),(c_{i_2},c_{i_3}),\ldots,(c_{i_{m-1}},c_{i_m}))$, що зв'язує його вершини $c_{i_1}$ і $c_{i_m}$. Так визначений шлях $P$ для довільного графу є не визначеним по відношенню до множини позначок кортежів. Але, якщо кортежам $(c_{i_{j-1}},c_{i_j})$ шляху $P$ поставити в однозначну відповідність їх певні позначки $e_{kj-1,j}\in E$, то отримаємо формульне представлення шляху $P=(e_{s,1,2},e_{j,2,3},\ldots,e_{r,m-1,m})$ довжини $m-1$. Так як елементи $e_{kij}$, або позначені $e_{k,i,j}$, довільного шляху

$P$ визначають кортеж $(c_i, c_j)$ навантажений позначкою $e_k \in E'$, то за формульним представленням шляху завжди однозначно відтворюється відповідний йому графічний образ.

Послідовність елементів шляху $P = (e_{s,1,2}, e_{j,2,3}, \ldots, e_{r,m-1,m})$ конструктивно утворює ланцюжок $l = e_{s12} e_{j23} \ldots e_{r,m-1,m}$, побудований над множиною $E$ та технологічний ланцюжок $l^t = e_s e_j \ldots e_r$ визначений на алфавіті $E'$. Таким чином між шляхами $P$ і утвореними ланцюжками $l$ ($l^t$) існує ізоморфне (гомоморфне) відношення.

За допомогою альтернативної двомісної комутативної операції $(\vee)$ - «або» над множиною шляхів кожен зв'язаний граф $G$ представляється формулою $G = \underset{i \in I}{\vee} P_i$, за якою можна створити множину ланцюжків $L(G) = \{l_i\}$ – мову зв'язаного графу $G$ та технологічну мову $L(E') = \{l_i^t\}$. Причому для кожного ланцюжка $l \in L(G)$ і $l^t \in L(E')$ його утворюючий шлях задає структуру утворення ланцюжка. Наприклад, якщо технологічний ланцюжок $l^t$ альтернативний, тобто представляється за допомогою операції $(\vee)$ над множиною $L(E')$, як $l^t = l_1^t \vee l_2^t$, то його структура утворення визначається формулою $P_1 \vee P_2$, для якої $P_1$ і $P_2$ шляхи утворення відповідних ланцюжків $l_1^t$ і $l_2^t$. Структура утворення ланцюжка може бути лінійною або нелінійною. Шлях $P$ довжини один є простим шляхом. Шлях який не містить петель та контурів – лінійний, і його можна представити у скороченій структурній формі. Наприклад, лінійний шлях $P = (e_{s12}, e_{j23}, \ldots, e_{r,m-1,m})$ у скороченій формі є $P = ((e_s e_j \cdots e_r)_{1,m})$, а відповідний йому ланцюжок – $l = (e_s e_j \cdots e_r)_{1,m}$.

Будемо вважати два шляхи (два графи) еквівалентними, якщо утворені ними технологічні мови однакові. Так лінійний контур та його скорочений шлях еквівалентні.

Дослідження графів можна виконувати за його шляхами або над шляхами, до яких згортаються в результаті перетворень ці графи. Одне з таких перетворень «скорочення лінійної форми» приведене вище. Розглянемо ще декілька правил перетворення графів [5] і алгебраїчних перетворень графових формул.

1. Правило виключення паралельної дуги:

$$e_{1ij} \vee e_{2ij} = (e_1 \vee e_2)_{ij},$$

при якому вершини зберігаються. Якщо $i = j$, то маємо частковий випадок правила – виключення паралельних петель.

2. Правило виключення альтернативної дуги:

$$e_{1ij} \vee e_{2ik} = \begin{cases} (e_1 \vee e_2)_{ij}, \text{ вершина } k - \text{виключена;} \\ (e_1 \vee e_2)_{ik}, \text{ вершина } j - \text{виключена;} \end{cases}$$

за яким дві суміжні дуги замінюються однією – $(c_i, c_j)$ або $(c_i, c_k)$.

3. Правило виключення петлі:

$$(e_{1ii}, (e_{2ij} \vee e_{3ik})) = (e_1^n e_2)_{ij} \vee (e_1^n e_3)_{ik},$$

де $e_1^n$ – технологічний ланцюжок довільної довжини утворений петлею $e_{1ii}$.

Очевидно, це правило поширюється і на кінцеву петлю, тобто

$$\left(\left(e_{1ik} \vee e_{2jk}\right), e_{3kk}\right) = \left(e_1 e_3^n\right)_{ik} \vee \left(e_2 e_3^n\right)_{jk}.$$

4. Правило виключення контурів:

$$(e_{1ij}, e_{3ji}) \vee e_{2ik} = ((e_1 e_3)^n e_1)_{ij} \vee ((e_1 e_3)^n e_2)_{ik},$$

яке узагальнює правило 3.

5. Правило виключення вершини:

$$(e_{1im}, e_{3mn}) \vee (e_{2jm}, e_{4mk}) = \left((e_1 e_4)_{ik} \vee (e_1 e_3)_{in}\right) \vee \left((e_2 e_3)_{jn} \vee (e_2 e_4)_{jk}\right)$$

Правила 1 … 5 поширюються на більшу ніж дві кількості ланцюжків і дозволяють привести граф до еквівалентного простого шляху.

Розглянемо застосування правил виключення на прикладі графу заданого формулою:

$$(e_{114}) \vee (e_{212}, e_{524}) \vee (e_{212}, e_{323}, e_{432}, e_{524}) \qquad (1)$$

і перетворимо її у формулу простого шляху.

Аналіз формули (1) показує, що вершину $c_2$ можна виключити, тому застосовуючи п'яте правило виключення до другого і третього альтернативних ланцюжків отримаємо таку формулу:

$$(e_{114}) \vee ((e_2 e_5)_{14}) \vee ((e_2 e_3)_{13}, (e_4 e_5)_{34}) \vee ((e_2 e_3)_{13}, (e_3 e_4)_{33}, (e_4 e_5)_{34})$$

Виконуючи далі в цій формулі скорочення третього і четвертого альтернативних ланцюжків та застосовуючи перше правило виключення паралельних дуг, в результаті перетворень матимемо наступний еквівалентний до (1) простий шлях $\left(e_1 \mid e_2 e_5 \mid e_2 e_3 e_4 e_5 \mid e_2 (e_3 e_4)^n e_5\right)_{14}$, який утворює технологічну мову $L(E') = \{e_1, (e_2 (e_3 e_4)^n e_5);\ n = 0,1,2,\ldots\}$ графу (1).

Очевидно, що аналогічні перетворення можна виконати і над іншими зв'язаними графами. Якщо граф не зв'язаний, то його вершини завжди можна «зв'язати» ввівши дві віртуальні вершини і з'єднавши їх дугами, навантаженими порожнім символом $\varepsilon$, з іншими вершинами графу так, щоб отримати зв'язаний орієнтований граф. Тому має місце наступне твердження.

**Твердження 1.** Будь який зв'язаний граф за допомогою правил виключення 1 … 5 можна завжди звести до еквівалентного йому шляху.

Враховуючи твердження 1 подальші дослідження проведемо для шляхів зв'язаних графів.

## Системи утворюючих підшляхів

Дослідити будову утворюючих шляхів ланцюжків мови $L(G)$ можна за допомогою підшляхів. Нехай $l_1$ і $l_2$ ланцюжки утворені шляхами $P_1$ і $P_2$. Шлях $P_1$ є підшляхом шляху $P_2$ $(P_1 \preceq P_2)$, якщо ланцюжок $l_1$ є підланцюжком ланцюжка $l_2$, тобто $l_1 \subseteq l_2$.

На підшляхах можливо створити їх композиції, для цього введемо операції перетину, різниці та об'єднання шляхів.

Під перетином двох підшляхів $P_1$ і $P_2$ шляху $P$ розуміється їх спільний підшлях $P_1 \cap P_2$, такий, що $l_1 \bigcap l_2 \neq \varnothing$ ($\bigcap$ – операція перетину ланцюжків); інакше їх перетин порожній.

За різницю двох підшляхів $P_1$ і $P_2$, для яких $l_1 \bigcap l_2 \neq \varnothing$ приймемо такий шлях або шляхи $P_1 \multimap P_2$, що $l_1 - l_2$ (тут операція $(-)$ віднімання ланцюжків).

Операція об'єднання шляхів $P_1$ і $P_2$ є $P_1 \cup P_2$ така, що $l_1 \bigcup l_2$ і за якою отримаємо новий шлях $P_3$, якщо:

1) $l_1 \subseteq l_2$, то $P_3 = P_2$ або $l_2 \subseteq l_1$, то $P_3 = P_1$;

2) один із підшляхів, наприклад, $P_1$ є петля (контур) такий, що його початкова вершина є заключною вершиною деякого кортежу другого шляху, тоді шлях $P_3$ є шлях $P_2$, в який включено шлях $P_1$;

3) початкова вершина одного шляху є заключною вершиною другого шляху або деякого кортежу другого шляху, тоді шлях $P_3$ утворений другим шляхом (або його часткою) продовженим першим;

4) в деяких випадках результат об'єднання може давати підшлях $P_3$ при комбінації часткових ситуацій 1) … 3).

В інших випадках їх об'єднання дасть два окремих шляхи або деякий граф. Так, наприклад, для шляху, позначки кортежів якого вибрані однаковими, з контуром і циклом $P = (e_{12}, e_{23}, e_{33}, e_{32}, e_{24}, e_{45})$ об'єднання його підшляхів $(e_{12}, e_{23}, e_{33})$, $(e_{32}, e_{24})$ дає підшлях $P_3 = (e_{12}, e_{23}, e_{33}, e_{32}, e_{24})$ або граф з двома шляхами $P_1 = (e_{12}, e_{23}, e_{33})$ і $P_2 = (e_{12}, e_{23}, e_{32}, e_{24}) = (e_{12}, e_{22}, e_{24})$. Але подальше об'єднання шляхів $P_1$ і $P_2$ дає підшлях $P_3$. Якщо ж розглянути об'єднання $(e_{12}, e_{23}, e_{33}, e_{32}) \cup P_2$, для якого частково виконуються випадки 1) − 3), тобто перекриття підшляхів, то знову отримаємо підшлях $P_3$.

Нескладно бачити, що операція об'єднання підшляхів, наприклад, за пунктом 3) взагалі не комутативна і для перетину та об'єднання підшляхів шляху $P$ справедлива така теорема.

**Теорема 1.** Непорожній перетин $\bigcap\limits_{i \in I} P_i$ (об'єднання, за правилами пунктів 1) … 4), $\left(\bigcup\limits_{i \in I} P_i;\ P_k \cap P_j \neq \varnothing,\ P_k, P_j \in \{P_i\}\right)$) сукупності підшляхів шляху $P$ утворює його підшлях.

Як нескладно перевірити, за теоремою 1 та за допомогою операцій об'єднання і перетину над усіма простими підшляхами шляху $P$ можна утворити множину всіх підшляхів $\{P_i\}$ цього шляху.

Нехай $\{P_i\}$ деяка множина підшляхів шляху $P$, тоді дамо наступні визначення.

**Визначення 1.** Підшлях $P_k$ шляху $P$ на множині підшляхів $\{P_i\}$ є максимальним за включенням, якщо у цій множині можна вказати таку підмножину $\{P_j;\ j \in I\}$, що для її елементів має місце ланцюг за включенням $P_{j_1} \prec P_{j_2} \prec \cdots \prec P_{j_m} = P_k$ і не існує серед елементів множини $\{P_i\}$ такого − $P_s$, що б $P_k \prec P_s$.

Зрозуміло, що максимальних за включенням підшляхів на множині $\{P_i\}$ може бути декілька.

**Визначення 2.** Сукупність $S_P$ (не всіх порожніх) підшляхів $P_j$ шляху $P$, таких, що $\{P_j;\ \bigcup\limits_j P_j = P\}$ називається системою утворюючих підшляхів шляху $P$.

Систему $S_P$ назвемо повною системою, якщо в ній немає зайвих підшляхів, які не впливають на відтворення шляху $P$, тобто при вилученні будь-якого підшляху з повної системи вона втрачає властивість утворюючої. Якщо система відтворюючих підшляхів шляху $P$ складається з двох підшляхів $P_1$ і $P_2$ таких, що $P = P_1 \cup P_2$ або $P_2 \cup P_1 = P$ і $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, то підшлях $P_1$ назвемо доповненням підшляху $P_2$ до шляху $P$ і позначимо це так $P_1 \setminus P_2 \doteq P$. Очевидно, за теоремою 1, підшлях $P_1$ є доповненням підшляху $P_2$ до шляху $P$ і в тому випадку, коли $P_2 = \bigcup_j P_j$, де $P_j$ підшляхи шляху $P$ такі, що $P_j \not\prec P_1$.

**Лема 1.** Із всякої утворюючої системи $S_P$ можна виділити підшляхи $P_1$ і $P_2$ такі, що $P_1 \setminus P_2 \doteq P$ або побудувати їх на цій системі такими, що вони доповнюють один одного до шляху $P$.

Лема доводиться досить просто. Сформуємо на системі підшляхів $S_P$ дві підмножини таким чином, щоб кожна з них містила в собі такі підшляхи, об’єднання яких утворювало б по одному результуючому шляхові $P_1$ і $P_2$. Зрозуміло, що в результаті розбиття системи $S_P$ на підмножини може статися, що одна або обидві підмножини мають тільки по одному елементу, які приймемо за відповідні шляхи $P_1$ і $P_2$. Якщо тепер $P_1 \cap P_2 = \varnothing$, то лема доведена. У протилежному випадку на системі $S_P$ за допомогою операцій $(\cup, \cap, \multimap)$ та над результатами цих операцій побудуємо повну множину $\{P_i^*\}$ простих підшляхів шляху $P$. Очевидно, що для будь яких підшляхів $P_j^*, P_s^* \in \{P_i^*\}$ їх перетин $P_j^* \cap P_s^* = \varnothing$ і крім того $\bigcup_i P_i^* = P$. Тому, об’єднуючи всі прості підшляхи $\{P_i^*\}$ окрім одного у шлях $P_2$, а той, що зостався позначивши через $P_1$, отримаємо доповнення $P_1 \setminus P_2 \doteq P$.

Відношення $(\prec)$ є відношенням еквівалентності, тому результат наступної леми доводиться досить просто.

**Лема 2.** Нехай $P_1 \setminus P_2 \doteq P$, тоді множину всіх підшляхів $\{P_i\}$ шляху $P$ можна упорядкувати за включенням розподіливши їх за трьома класами:

$$\left.\begin{aligned} K_1 = \{P_j;\, P_j \prec P_1\},\; K_2 = \{P_j;\, P_j \prec P_2\},\\ K_3 = \{P_j;\, P_j \cap P_1 \in K_1,\, P_j \cap P_2 \in K_2\}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Очевидно, об’єднання всіх підшляхів класів $K_1$ і $K_2$ визначають доповнені підшляхи $P_1$ і $P_2$ до шляху $P$.

Леми 1 і 2 є корисними для визначення будови систем утворюючих підшляхів $S_P$.

**Теорема 2.** На будь якій системі відтворюючих підшляхів шляху $P$ можна створити розбиття на підкласи класів $K_1, K_2$ і $K_3$, причому підклас класу $K_3$ можливо буде порожнім.

**Теорема 3.** На будь якій системі утворюючих підшляхів $S_P$ можна побудувати нову систему $S_P^*$ з максимальним за включенням підшляхом $P_k$.

За умовою теореми система $S_P$ є утворюючою і за теоремою 2 на ній можна створити класи $K_j^* \subset K_j$, $j = 1,2,3$. Тому беручи, наприклад, підклас $K_1^*$ і за формулами (2) у цьому класі маємо максимальний за включенням підшлях $P_k = P_1$.

## Критерій існування утворюючої системи

Перейдемо до конструктивного питання побудови повної системи утворюючих підшляхів деякого шляху та до пошуку алгоритмічних критеріїв за якими можна побудувати такі системи. Для розв’язку цього питання введемо у розгляд максимальний підшлях шляху $P$.

**Визначення 3.** Підшлях $P_m$ назвемо максимальним до шляху $P$, якщо: $P_m \prec P$ і не існує такого підшляху $\overline{P} \prec P$, за для якого б мало місце власне включення $P_m \prec \overline{P}$.

Очевидно, шлях $P_m$ буде максимальним до шляху $P$ тоді і тільки тоді, коли серед усіх підшляхів $\{P_i\}$ шляху $P$ існує такий простий підшлях $P^*$, що $P_m \cap P^* = \varnothing$ і $P_m \cup P^* = P$ або $P^* \cup P_m = P$. Тобто максимальний підшлях $P_m$ є доповненням простого шляху $P^*$ $P_m \setminus P^* \doteq P$. Зрозуміло, що максимальних шляхів до шляху $P$ є багато, але кількість їх обмежена.

Позначимо через $M_P$ множину всіх максимальних шляхів до шляху $P$. Звісно, що множина $M_P$ є підмножиною множини всіх підшляхів $\{P_i\}$ шляху $P$.

Для наступного необхідно розглянути можливість розширення деякого підшляху шляху $P$ до його максимального.

**Лема 3.** На будь якому підшляхові $P_1 \prec P$ можливо побудувати максимальний шлях $P_m \in M_P$ до шляху $P$.

За твердженням леми, для довільного підшляху $P_1 \in \{P_i\}$ шляху $P$ у множині $M_P$ існує такий підшлях $P_m$, що можливе тільки таке включення $P_1 \prec P_m$, бо в протилежному випадку $P_1 \succ P_m$ і підшлях $P_1$ не є власним підшляхом шляху $P$.

Припустимо, що для підшляху $P_1$ у множині $M_P$ не існує підшляху $P_m \succ P_1$. Тоді враховуючи те, що $M_P \subset \{P_i\}$ серед скінченої множини $\{P_i\}$ всіх підшляхів шляху $P$ знайдеться такий підшлях $P_{1,m}$, що $P_1 \prec P_{1,m}$ і для якого існує простий підшлях $P^* \in \{P_i\}$ такий, що $P^* \cup P_{1,m} = P$; звідси маємо протиріччя.

Процес розширення підшляху $P_1$ до максимального можна виконати приєднуючи до шляху $P_1$ такі прості підшляхи $P_j^* \in \{P_i\}$ і стільки разів, щоб отримати підшлях $P_{1,m} \in M_P$.

Тепер природно формулюється критерій за яким деяка множина підшляхів є утворюючою системою заданого шляху.

**Теорема 4.** Для того, щоб множина підшляхів $\{P_j\} \subset \{P_i; i \in I\}$ шляху $P$ була утворюючою $S_P$ необхідно і достатньо, щоб для будь якого підшляху $P_m \in M_P$ у множині $\{P_j\}$ знайшовся хоча б один підшлях $P_k$, для якого є деякий простий підшлях $P^* \in \{P_i\}$, що $P^* \prec P_k$ і $P^* \not\prec P_m$.

Для кожного максимального підшляху $P_m \in M_P$, за його визначенням, існує такий простий підшлях $P^* \in \{P_i\}$, що $P^* \preceq P \multimap P_m$. За необхідністю система підшляхів $S_P = \{P_j\}$ є утворюючою шляху $P$, тобто $\bigcup_j P_j = P$ тому в системі $S_P$ існує хоча б один підшлях $P_k$, для якого має місце $P^* \prec P_k$.

Для доведення достатності розглянемо таку підмножину $\{P_j\} \subset \{P_i; i \in I\}$ шляху $P$, що для будь якого максимального підшляху $P_m \in M_P$ у цій підмножині існує хоча б один підшлях $P_k$, за для якого знайдеться простий шлях $P^* \prec P_k$ такий, що $P^* \not\prec P_m$. І доведемо, що підмножина $\{P_j\}$ є утворюючою системою $S_P$.

Підемо від протилежного, для цього припустимо, що підмножина $\{P_j\}$ не є утворюючою системою підшляхів $S_P$ тобто $\bigcup_j P_j \neq P$. Тоді існує деякий простий шлях $P^* \prec P$ для якого немає жодного $P_k \in \{P_j\}$ такого, що $P^* \prec P_k$. Згідно з визначенням 3 для деякого $P_m \in M$ виконується $P^* \cup P_m = P$ і $P^* \not\prec P_m$. Тоді згідно умов теореми існує такий $P_k$ що $P^* \prec P_k$. Маємо протиріччя. Отже припущення невірне і таким чином теорема доведена.

## Алгоритм побудови утворюючих систем

Наведені вище результати дозволяють запропонувати алгоритм побудови повної системи утворюючих підшляхів будь якого шляху $P$:

1) побудувати множину максимальних підшляхів $M_P$ шляху $P$;

2) на простих підшляхах $P_k^* \prec P$ таких, що $P_k^* \not\prec P_{j,m} \in M_P$ побудувати підшляхи $P_i$, для яких хоча б один простий підшлях $P_k^* \prec P_i$ і утворити на них утворюючу систему $S_P = \{P_i\}$;

3) виділити у системі $S_P$ або побудувати за допомогою операції $(\cup)$ два підшляхи $P_1, P_2$ такі, що $P_1 \setminus P_2 \doteq P$;

4) на системі $S_P$ і підшляхах $P_1, P_2$ побудувати граф залежностей за включенням підшляхів $P_i$ – структурний граф залежностей;

5) за структурним графом на підшляхах $P_1, P_2$ побудувати підкласи $K_j^*$ класів $K_j$, $j = 1,2,3$;

6) в класах $K_1^*$ і $K_2^*$ виділити максимальні за включенням підшляхи;

7) на множині всіх максимальних за включенням підшляхів класів $K_1^*$ і $K_2^*$ утворити повну систему відтворюючих підшляхів шляху $P$.

Розглянемо застосування наведеного алгоритму побудови повної утворюючої системи підшляхів заданого шляху на такому прикладі.

Нехай на станах 1,2, …, 7 задано деякий технологічний процес, між станами якого (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (4, 5) виконуються відповідно операції $a, b, c, d, a, s$ ; між станом (4,

4) послідовно виконуються операції $u$, $v$, а між станами (5, 6), (6, 7) і (7, 5) − операція $e$. І нехай, для визначеності, послідовність виконання операцій технологічного процесу визначена формулою:

$$P = (a_{12}, b_{23}, c_{33}, d_{32}, a_{24}, u_{44}, v_{44}, s_{45}, e_{56}, e_{67}, e_{75}) .$$

Необхідно побудувати систему утворюючих підшляхів, за допомогою якої можна створити будь який технологічний процес на визначеному класі станів та операцій.

Очевидно, структура утворення ланцюжка шляхом $P$ не зміниться, якщо його замінити еквівалентним шляхом, скориставшись правилом виключення контуру (4):

$$P = (a_{12}, b_{23}, c_{33}, d_{32}, a_{24}, u_{44}, v_{44}, s_{45}, e_{55}) . \qquad (3)$$

Легко з'ясувати, що множиною максимальних до шляху (3) підшляхів є

$$M_P = \{P \multimap (a_{12}),\ P \multimap (c_{33}),\ P \multimap (u_{44}),\\ P \multimap (v_{44}),\ P \multimap (e_{55})\}$$

тому простими доповненнями до них будуть:

$$(a_{12}),\ (c_{33}),\ (u_{44}),\ (v_{44}),\ (e_{55}) \qquad (4)$$

Виходячи з цього, на простих підшляхах (4) побудуємо за наступним пунктом 2) алгоритму утворюючу систему:

$$S_P = \{P_0 = (b_{23}, d_{32}, a_{24}, s_{45}, e_{55}),\\ P_3 = (u_{44}, v_{44}, s_{45}),\ P_4 = (a_{12}, b_{23}, c_{33}, d_{32}),\\ P_5 = (s_{45}, e_{55}),\ P_6 = (a_{12}, b_{23}, d_{32}, a_{24}),\\ P_8 = (a_{12}, b_{23}, d_{32})\}.$$

Серед підшляхів системи $S_P$ немає таких підшляхів $P_1$ і $P_2$, щоб $P_1 \setminus P_2 \doteq P$, тому побудуємо ці підшляхи на утворюючій системі як $P_1 = P_3 \cup P_5 = (u_{44}, v_{44}, s_{45}, e_{55})$ та $P_2 =$ $P_2 = P_4 \cup P_6 = (a_{12}, b_{23}, c_{33}, d_{32}, a_{24})$. Тепер для підшляхів системи $S_P$ маємо можливість зобразити структурний граф (рис. 1) залежностей за включенням і підшляхи системи $S_P$ розподілити по підкласах $K_1^* = \{P_3, P_5\}$, $K_2^* = \{P_4, P_6, P_8\}$ та $K_3^* = \{P_0\}$. Очевидно, максимальними за включеннями в класах $K_1^*$ і $K_2^*$ будуть підшляхи $P_3, P_4, P_5, P_6$, тому вони породжують повну систему утворюючих підшляхів, за якою відтворюється шлях $P = P_4 \cup P_6 \cup P_3 \cup P_5$.

Побудована повна система відтворюючих підшляхів шляху $P$ не єдина. Щоб довести це, запропонуємо інший підхід до побудови повної системи утворюючих підшляхів, який продемонструємо для шляху (3) розглянутого прикладу. Для цього спочатку визначимо повний структурний граф підшляхів шляху $P$.

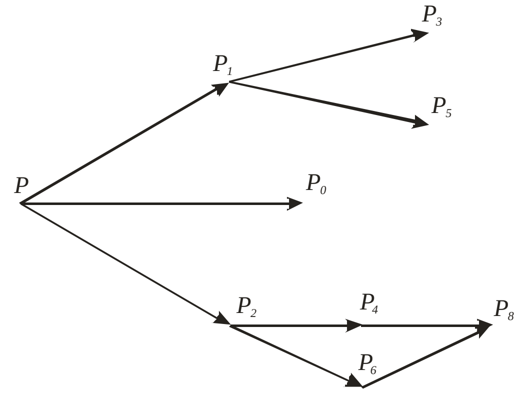


Рис. 1. Структурний граф залежностей підшляхів за включенням

**Визначення 4.** Граф назвемо повним структурним графом підшляхів шляху $P$, якщо він складається з максимальних підшляхів, за визначенням 3.

Фрагмент будови повного структурного графу шляху (3) наведено на рис. 2.

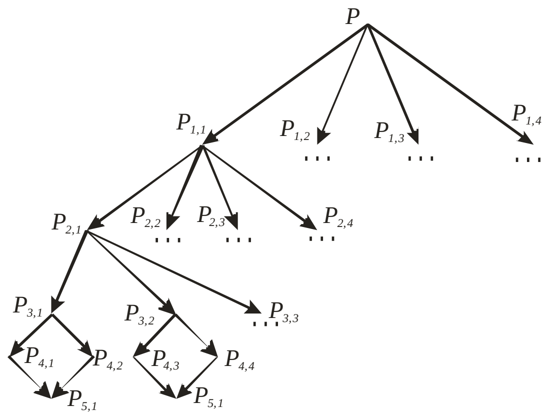


Рис. 2. Повний структурний граф залежностей підшляхів за включенням

де – для першого рівня $P_{1,1} = P \multimap c_{33}$, $P_{1,2} = P \multimap u_{44}$, $P_{1,3} = P \multimap v_{44}$, $P_{1,4} = P \multimap e_{55}$; для другого – $P_{2,1} = P_{1,1} \multimap b_{23}$, $P_{2,2} = P_{1,1} \multimap u_{44}$, $P_{2,3} = P_{1,1} \multimap v_{44}$, $P_{2,4} = P_{1,1} \multimap e_{55}, \ldots$; для третього – $P_{3,1} = P_{2,1} \multimap u_{44}$, $P_{3,2} = P_{2,1} \multimap v_{44}$, $P_{3,3} = P_{2,1} \multimap e_{55}, \ldots$; для четвертого рівня підшляхів $P_{4,1} = P_{3,1} \multimap v_{44}$, $P_{4,2} = P_{3,1} \multimap e_{55}$, $P_{4,3} = P_{3,2} \multimap e_{55}, \ldots$; та п'ятого – $P_{5,1} = (a_{12}, a_{24}, s_{45})$.

Для створення повної системи утворюючих підшляхів шляху, за основні підшляхи (утворюючий базис $P_{i,j}$) системи візьмемо кінцеві вершини повного структурного графу (в нашому випадку це тільки один шлях $P_{5,1}$ (див. рис. 2)) і додамо до них підшляхи $P \multimap P_{i,j}$. Отже, отримаємо нову повну систему утворюючих підшляхів шляху (3)

$$S_P^0 = \{P_{5,1}, P \multimap P_{5,1}\} = \{(a_{12}, a_{24}, s_{45}), (b_{23}, c_{33}, d_{32}), (u_{44}, v_{44}), (e_{55})\},$$

яка складається з лінійного підшляху, контуру та трьох петель.

## Висновки

Застосування алгебраїчного підходу дозволило через введення формульного представлення графу і максимального за включенням підграфу цього графу, сформулювати і довести критерій існування системи утворюючих підграфів заданого графу.

Розроблено алгоритм розв'язання прямої задачі побудови утворюючої системи підграфів, за якою можна відтворити будь який технологічний граф заданого класу.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК


1. Яблонский С. И., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста. – М.: Наука, 1966. – 120 с.
2. Глушков В. М., Цейтлин Г. Е., Ющенко Е. Л. Алгебра. Языки. Программирование. – К.: Наукова думка, 1978. – 320 с.
3. Мальцев А. И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 391 с.
4. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, − 1984 – 380 с.
5. Брауэр В. Введение в теорию конечных автоматов. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.


Надійшла до редколегії 10.04.07.