

## ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА-ЛАГРАНЖА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ «МОСТ-ПОЕЗД»

Розглянуті питання застосування рівнянь Ейлера-Лагранжа до рішення задачі вимушених коливань системи «міст-поїзд». Враховуються динамічні особливості рухомих навантажень та прогонових будов мостів.

Рассмотрены вопросы применения уравнений Эйлера-Лагранжа к решению задачи вынужденных колебаний системы «мост-поезд». Учитываются динамические особенности подвижных нагрузок и пролетных строений железнодорожных мостов.

The questions of application of the Euler-Lagrange equations to the decision of forced vibration problem of system «bridge-train» are considered. The account of dynamic features of moving loading and bridge span beams are made.

Вынужденные колебания подвижного состава при высоких скоростях движения не могут рассматриваться независимо от вызываемых ими колебаний моста. В свою очередь, при проектировании моста под железную дорогу

необходимо учитывать динамические особенности железнодорожных нагрузок.

Рассмотрим совместные пространственные колебания системы «мост-поезд», где каждый элемент моделируется системой связанных твердых тел (рис. 1).

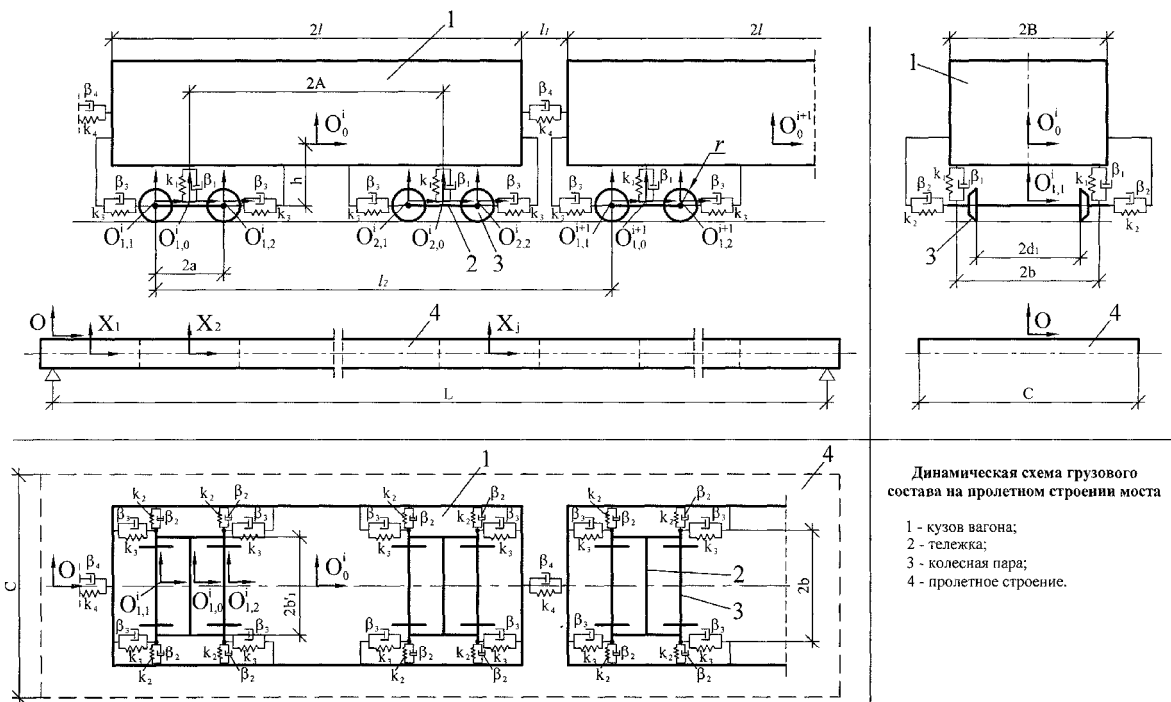


Рис. 1. Динамическая модель системы «мост-поезд».

Так, балочная конструкция пролетного строения разделяется на участки, в пределах которых поперечные сечения элементов и изгибные жесткости считаются постоянными. Каждый участок балки моделируется твердым телом с соответствующими геометрическими и

инерционными характеристиками и может совершать, в общем случае, пространственные поступательные и вращательные движения. Твердые тела связаны друг с другом посредством упругих связей-стержней, обладающих жесткостными характеристиками исходной

конструкции балки. Такая модель позволяет описать пространственные упругие колебания пролетного строения моста, используя конечное число степеней свободы. Также предполагается, что материал следует закону Гука, а деформации малы.

В свою очередь, каждый вагон поезда рассматривается в виде системы таких твердых тел, как колесные пары, рамы тележек, кузов, груз и другие детали вагона. В качестве связей между телами учитывается рессорное подвешивание и связи в автосцепках между вагонами [2].

Для динамической модели поезда, состоящего из четырехосных грузовых вагонов, приняты следующие допущения:

– жесткости несущих конструкций вагона, ходовых частей и рессорного подвешивания являются постоянными величинами. Комплект рессорного подвешивания заменен пружинами эквивалентной жесткости;

– жесткости кузова, рам тележек, колесных пар значительно превышают жесткость рессорного подвешивания, и моделируются твердыми телами.

Математическая модель колебаний системы «мост–поезд» сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка, основанной на законах сохранения энергии в форме уравнений Эйлера-Лагранжа с учетом различных видов упругого и неупругого сопротивления и нелинейностей [4].

Для получения общего уравнения динамики системы «мост–поезд» будем исходить из дифференциальных уравнений движения центров масс всех её элементов в форме второго закона Ньютона [5]:

$$m_i a_i = F_i + R_i; \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где  $N$  – количество элементов системы;  $m_i$  – масса  $i$ -го элемента системы;  $a_i$  – ускорение центра масс  $i$ -го элемента;  $F_i$  – главный вектор активных сил, приложенных к центру масс  $i$ -го элемента;  $R_i$  – главный вектор реакций связей, наложенных на  $i$ -й элемент системы.

Для исключения реакций связей скалярно умножим каждое из уравнений (1) на соответствующее возможное перемещение центра масс  $i$ -го элемента  $\delta r_i$ :

$$m_i a_i \cdot \delta r_i = (F_i + R_i) \cdot \delta r_i. \quad (2)$$

Складывая полученные произведения, приходим к уравнению:

$$\sum_{i=1}^N m_i a_i \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i + \sum_{i=1}^N R_i \cdot \delta r_i. \quad (3)$$

Предполагая, что все связи, наложенные на систему, являются идеальными, и работа их реакций на соответствующих возможных перемещениях равна нулю, приходим к общему уравнению динамики системы:

$$\sum_{i=1}^N m_i a_i \cdot \delta r_i = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i. \quad (4)$$

В каждый фиксированный момент времени  $t$  возможное перемещение  $\delta r_i$  вычисляется по формуле:

$$\delta r_i = r_i(q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n, t) - r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_s} \cdot \delta q_s, \quad (5)$$

где  $q_s$  – перемещения центров масс элементов системы (обобщенные координаты);  $n$  – количество обобщенных координат;  $\delta q_s$  – вариации обобщенных координат.

В качестве обобщенных выбирают такие координаты, для которых матрицы инерционных, квазиупругих и диссипативных коэффициентов имеют простейшую форму [6].

Выражая уравнение (4) через производную по времени  $t$  (точкой принято обозначение производной по времени), аналогично [4], получим общее центральное уравнение:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot \delta r_i = \delta T + \delta W + \sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot \left[ (\delta r_i) \dot{\phantom{r}} - \delta v_i \right], \quad (6)$$

где  $v_i$  – скорость центра масс  $i$ -го элемента системы;  $T$  и  $\delta T$  – соответственно кинетическая энергия системы и её вариация:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2, \quad \delta T = \frac{1}{2} \delta \sum_{i=1}^N m_i v_i^2; \quad (7)$$

$\delta W$  – элементарная работа активных сил:

$$\delta W = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \delta r_i. \quad (8)$$

Для упрощения процесса составления уравнений движения, более приемлемыми будут уравнения Эйлера-Лагранжа, в которых, в отличие от уравнений Лагранжа, вместо обобщенных скоростей вводятся квазискорости  $\omega_s$  и вариации квазиординат  $\delta \lambda_s$  [4]:

$$\omega_s = a_{s1}\dot{q}_1 + \dots + a_{sn}\dot{q}_n = \sum_{r=1}^n a_{sr}\dot{q}_r, \quad (9)$$

$$\delta\pi_s = a_{s1}\delta q_1 + \dots + a_{sn}\delta q_n = \sum_{r=1}^n a_{sr}\delta q_r. \quad (10)$$

Выражая каждое слагаемое уравнения (6) через квазискорости и вариации квазикоординат, получим:

$$\sum_{i=1}^N m_i v_i \cdot \delta r_i = \sum_{s=1}^n p_s^* \cdot \delta\pi_s; \quad (11)$$

$$\delta T = \sum_{s=1}^n \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_s} \cdot \delta \omega_s + \frac{\partial T}{\partial \pi_s} \cdot \delta \pi_s \right); \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{s=1}^n \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial r_i}{\partial \pi_s} \cdot \delta \pi_s = \\ &= \sum_{s=1}^n \delta \pi_s \sum_{i=1}^N F_i \frac{\partial r_i}{\partial \pi_s}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n p_s \cdot \left[ (\delta \pi_s) \cdot - \delta \dot{q}_s \right] &= \sum_{r=1}^n p_r^* \cdot \left[ (\delta \pi_r) \cdot - \right. \\ &\left. - \delta \omega_r - \sum_{t=1}^n \sum_{m=1}^n \gamma_{t,m}^r \omega_t \cdot \delta \pi_m \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где  $p_s^*$ ,  $p_s$  – обобщенные импульсы, отнесенные к квазискорости и обобщенной координате соответственно:

$$p_s^* = \frac{\partial T}{\partial \omega_s}, \quad p_s = \frac{\partial T}{\partial q_s}; \quad (15)$$

$\delta \omega_r$  – вариации квазискоростей:

$$\delta \omega_r = \sum_{s=1}^n \delta (a_{rs} \dot{q}_s); \quad (16)$$

$\gamma_{t,m}^s$  – трехиндексные символы Больцмана [4]:

$$\gamma_{t,m}^s = \sum_{k=1}^n \sum_{r=1}^n \left( \frac{\partial a_{sk}}{\partial q_r} - \frac{\partial a_{sr}}{\partial q_k} \right) b_{rt} b_{km}, \quad s, t, m = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Принимается, что матрица коэффициентов  $A = \{a_{sr}\}$ ,  $s, r = 1, \dots, n$ , невырожденная, т. е.  $\det(A) \neq 0$ . Тогда матрица  $B = \{b_{sr}\}$  связана с матрицей  $A$  соотношением:

$$B = A^{-1} \text{ или } A \cdot B = B \cdot A = E. \quad (18)$$

Введем обобщенную силу  $Q_s$ , отнесенную к квазикоординате:

$$Q_s = \sum_{i=1}^N F_i \cdot \frac{\partial r_i}{\partial \pi_s}. \quad (19)$$

Полученные зависимости позволяют записать общее центральное уравнение (6) в квазикоординатах:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n \frac{\partial T}{\partial \omega_s} \cdot \delta \pi_s &= \delta T + \sum_{s=1}^n Q_s \cdot \delta \pi_s + \\ &+ \sum_{s=1}^n \frac{\partial T}{\partial \omega_s} \cdot \left[ (\delta \pi_s) \cdot - \delta \omega_s \right] - \\ &- \sum_{r=1}^n \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n \gamma_{t,s}^r \frac{\partial T}{\partial \omega_r} \omega_t \cdot \delta \pi_s. \end{aligned} \quad (20)$$

Представим левую часть уравнения (20) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^n \frac{\partial T}{\partial \omega_s} \cdot \delta \pi_s &= \\ &= \sum_{s=1}^n \left[ \delta \pi_s \cdot \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_s} \right) \cdot + \frac{\partial T}{\partial \omega_s} (\delta \pi_s) \cdot \right], \end{aligned} \quad (21)$$

и после упрощений приходим к соотношению:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \delta \pi_s \cdot \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_s} \right) \cdot + \sum_{r=1}^n \sum_{t=1}^n \gamma_{t,s}^r \frac{\partial T}{\partial \omega_r} \omega_t - \right. \\ \left. - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} - Q_s \right] = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

из которого получаем уравнение Эйлера-Лагранжа [3; 4]:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \omega_s} \right) \cdot + \sum_{r=1}^n \sum_{t=1}^n \gamma_{t,s}^r \frac{\partial T}{\partial \omega_r} \omega_t - \frac{\partial T}{\partial \pi_s} = Q_s. \quad (23)$$

Для решения системы дифференциальных уравнений (23) необходимы дополнительные условия, учитывающие кинематику движения системы:

$$\dot{q}_r = b_{r1}\omega_1 + \dots + b_{rn}\omega_n = \sum_{s=1}^n b_{rs}\omega_s. \quad (24)$$

Рассмотрим движение системы координат  $X_i$ , связанной с центром масс  $i$ -го элемента относительно неинерциальной системы координат  $CX_i$ , движущейся в абсолютной (инерциальной) системе  $O$ . Движение системы  $CX_i$  в абсолютной системе координат  $O$  будет переносным, а локальной системы  $X_i$  – относительным (рис. 2).

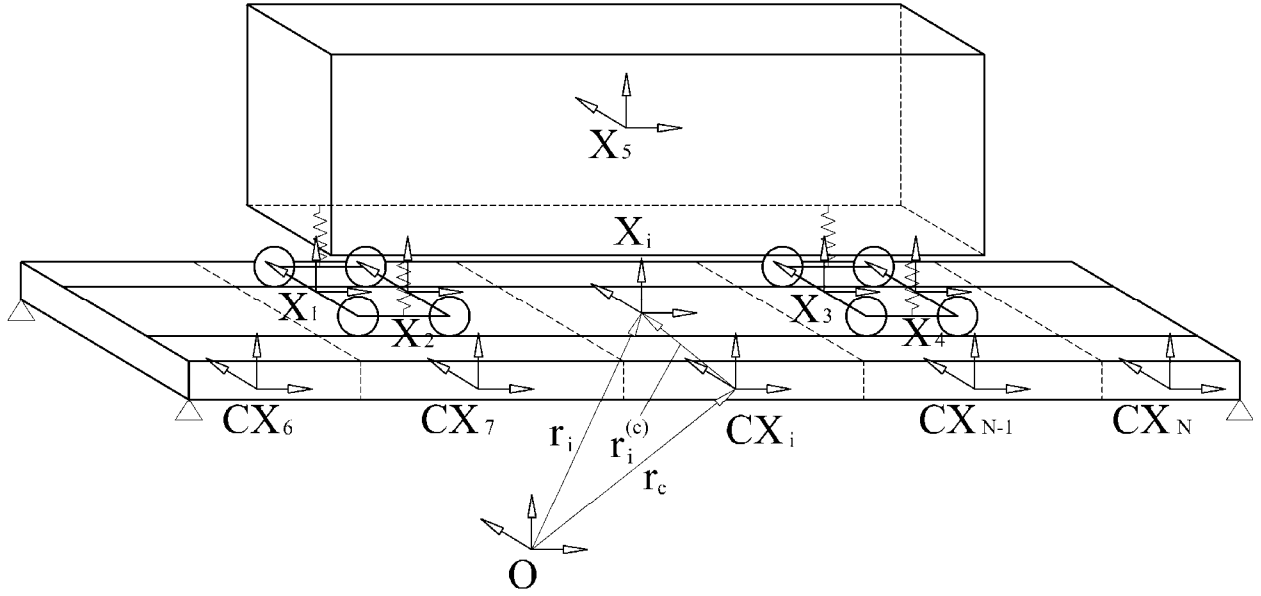


Рис. 2. Расчетная схема грузового вагона и пролетного строения моста.

Радиус-вектор  $r_c$  определяет переносное движение системы координат  $CX_i$ , а радиус-вектор  $r_i^{(c)}$  – относительное движение локальной системы  $X_i$ . Тогда радиус-вектор абсолютного движения  $r_i$  равен:

$$r_i = r_c + r_i^{(c)}. \quad (25)$$

Абсолютная скорость системы координат  $X_i$  состоит из поступательной скорости  $v_c$  и вращательной скорости  $\omega_c \times r_i^{(c)}$ :

$$v_i = v_c + \omega_c \times r_i^{(c)}. \quad (26)$$

Формула для выражения кинетической энергии движения этого элемента примет вид:

$$T_i = \frac{1}{2} \left[ m_i v_c^2 + 2m_i (v_c \times \omega_c) \cdot r_i^{(c)} + \omega_c \cdot \theta_i \cdot \omega_c \right], \quad (27)$$

где  $\omega_c \cdot \theta_i \cdot \omega_c = m_i (\omega_c \times r_i^{(c)}) \cdot (\omega_c \times r_i^{(c)})$ ,  $\theta_i$  – тензор инерции элемента в системе  $CX_i$ .

Примем в качестве квазиординат проекции вектора линейной скорости координатной системы  $X_i$  на оси системы координат  $CX_i$ :

$$\begin{cases} \omega_1 = v_{c,x}; \\ \omega_2 = v_{c,y}; \\ \omega_3 = v_{c,z}, \end{cases} \quad (28)$$

а также проекции вектора угловой скорости координатной системы  $X_i$  на те же оси:

$$\begin{cases} \omega_4 = \omega_{c,x}; \\ \omega_5 = \omega_{c,y}; \\ \omega_6 = \omega_{c,z}. \end{cases} \quad (29)$$

Составим дифференциальные уравнения движения  $i$ -го элемента системы. В координатной форме выражение кинетической энергии примет вид:

$$\begin{aligned} T_i = & \frac{1}{2} m_i (v_{c,x}^2 + v_{c,y}^2 + v_{c,z}^2) + \\ & + m_i (v_{c,y} \omega_{c,z} \cdot r_{i,x}^{(c)} - v_{c,z} \omega_{c,y} \cdot r_{i,x}^{(c)}) + \\ & + m_i (v_{c,z} \omega_{c,x} \cdot r_{i,y}^{(c)} - v_{c,x} \omega_{c,z} \cdot r_{i,y}^{(c)}) + \\ & + m_i (v_{c,x} \omega_{c,y} \cdot r_{i,z}^{(c)} - v_{c,y} \omega_{c,x} \cdot r_{i,z}^{(c)}) + \\ & + \frac{1}{2} (\theta_{i,x} \omega_{c,x}^2 + \theta_{i,y} \omega_{c,y}^2 + \theta_{i,z} \omega_{c,z}^2). \end{aligned} \quad (30)$$

Найдем поочередно частные дифференциалы кинетической энергии  $i$ -го элемента системы по указанным квазискоростям  $\omega_s$ .

Так, производная по квазискорости  $\omega_1$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial \omega_1} = \frac{\partial T_i}{\partial v_{c,x}} = & \frac{1}{2} m_i \frac{\partial v_{c,x}^2}{\partial v_{c,x}} + m_i \frac{\partial v_{c,x}}{\partial v_{c,x}} \omega_{c,y} \cdot r_{i,z}^{(c)} = \\ = & m_i v_{c,x} + m_i \omega_{c,y} \cdot r_{i,z}^{(c)}. \end{aligned} \quad (31)$$

Производные по квазискоростям  $\omega_2$  и  $\omega_3$  имеют аналогичный вид с соответствующей циклической перестановкой индексов  $x, y, z$ .

Производная по квазискорости  $\omega_4$  (а также по квазискоростям  $\omega_5$  и  $\omega_6$  с соответствующими индексами):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial \omega_4} &= \frac{\partial T_i}{\partial \omega_{c,x}} = \frac{1}{2} m_i v_{c,z} \frac{\partial \omega_{c,x}}{\partial \omega_{c,x}} \cdot r_{i,y}^{(c)} - \\ &- \frac{1}{2} m_i v_{c,y} \frac{\partial \omega_{c,x}}{\partial \omega_{c,x}} \cdot r_{i,z}^{(c)} + \frac{1}{2} \theta_{i,x} \frac{\partial \omega_{c,x}^2}{\partial \omega_{c,x}} = \\ &= \frac{1}{2} m_i (v_{c,z} \cdot r_{i,y}^{(c)} - v_{c,y} \cdot r_{i,z}^{(c)}) + \theta_{i,x} \omega_{c,x}. \end{aligned} \quad (32)$$

Проведем дифференцирование по времени полученных частных производных кинетической энергии. Уравнения разделяются на две группы: отвечающие поступательному (33) и вращательному (34) движению, соответственно.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \omega_1} &= m_i \dot{v}_{c,x} + m_i \dot{\omega}_{c,y} \cdot r_{i,z}^{(c)}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \omega_2} &= m_i \dot{v}_{c,y} + m_i \dot{\omega}_{c,z} \cdot r_{i,x}^{(c)}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \omega_3} &= m_i \dot{v}_{c,z} + m_i \dot{\omega}_{c,x} \cdot r_{i,y}^{(c)}; \end{aligned} \right. \quad (33)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \omega_4} &= \frac{1}{2} m_i (\dot{v}_{c,z} \cdot r_{i,y}^{(c)} - \dot{v}_{c,y} \cdot r_{i,z}^{(c)}) + \\ &+ \theta_{i,x} \dot{\omega}_{c,x}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \omega_5} &= \frac{1}{2} m_i (\dot{v}_{c,x} \cdot r_{i,z}^{(c)} - \dot{v}_{c,z} \cdot r_{i,x}^{(c)}) + \\ &+ \theta_{i,y} \dot{\omega}_{c,y}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_i}{\partial \omega_6} &= \frac{1}{2} m_i (\dot{v}_{c,y} \cdot r_{i,x}^{(c)} - \dot{v}_{c,x} \cdot r_{i,y}^{(c)}) + \\ &+ \theta_{i,z} \dot{\omega}_{c,z}. \end{aligned} \right. \quad (34)$$

Представим уравнение Эйлера-Лагранжа (23) в координатной форме с учетом (33) и использованием квазискорости  $\omega_1 = v_{c,x}$ , отражающей линейную скорость:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial v_{c,x}} \right) + \omega_{c,y} \frac{\partial T}{\partial v_{c,z}} - \omega_{c,z} \frac{\partial T}{\partial v_{c,y}} = F_x, \quad (35)$$

а также с учетом (34) и использованием квазискорости  $\omega_4 = \omega_{c,x}$ , отражающей угловую скорость:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_{c,x}} \right) + \omega_{c,y} \frac{\partial T}{\partial \omega_{c,z}} - \omega_{c,z} \frac{\partial T}{\partial \omega_{c,y}} + \\ + v_{c,y} \frac{\partial T}{\partial v_{c,z}} - v_{c,z} \frac{\partial T}{\partial v_{c,y}} = M_x, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $M$  – главный момент системы сил относительно осей, связанных с  $i$ -м элементом;  $F$  – главный вектор сил в проекциях на эти оси.

По аналогии, используя циклическую перестановку индексов, из уравнений (35)–(36) получим выражения, соответствующие остальным квазикоординатам.

Рассмотрим связи, действующие на элементы системы: упругие стержни, пружины и демпферы.

Так, для стержня зависимости упругих сил от координат задаются линейными соотношениями:

$$F^{(c)} = - \sum_{k=1}^n c_{s,k}, \quad (37)$$

где  $C = \{c_{s,k}\}$  – симметричная матрица жесткости. Потенциальная энергия деформированного стержня в этом случае будет равна:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n \sum_{k=1}^n c_{s,k} q_s q_k = \frac{1}{2} q' \cdot C \cdot q, \quad (38)$$

где  $q$ ,  $q'$  – столбец и строка обобщенных координат, соответственно.

Для линейной пружины упругость аналогична приведенной для стержня, с матрицей жесткости, содержащей только диагональные элементы  $k_1, k_2, k_3$  (рис. 1).

Для демпфера (диссипативная связь), сила сопротивления движению направлена противоположно скорости движения:

$$F^{(d)} = -\beta_j \frac{v_j^* - v_j}{|v_j^* - v_j|}; \quad j = 1, \dots, n, \quad (39)$$

где  $v^*$  – геометрическая разность векторов переносной и абсолютной скорости;  $v$  – квазискорость;  $\beta$  – коэффициент вязкости.

Уравнения (35)–(36) представляют возможность эффективно использовать особенность составных систем, учитывать повторяющуюся структуру и рассматривать их отдельные блоки (подсистемы).

В общем случае, для рассматриваемой системы (рис. 2) количество уравнений будет  $12N$ : по  $3N$  – для поступательного (35) и вращательного (36) движения, и  $6N$  – для кинематических связей (24).

Решение уравнений можно проводить одним из численных методов с желаемой точностью для различных случаев, в том числе, и с учетом нелинейностей, влияние которых на динамические характеристики системы «мост–поезд» будет весьма существенным. Такие нелинейности обусловлены, в частности, криволинейностью профиля поверхности катания колеса, зазорами в соединениях несущих узлов ходовых частей, действием сил сухого трения в опорах кузова на тележки, в опорных частях пролетных строений и другими факторами [1; 7]. Следует также отметить, что полную характеристику поведения моста, особенно гибких систем, в резонансной зоне можно получить только с помощью методов нелинейной механики.

Предлагаемый подход позволяет найти линейные и угловые перемещения, скорости, силы и моменты реакций в связях, и приводит к простым алгоритмам, удобным для программирования на ЭВМ. Расчеты могут проводиться также для ускоренного и замедленного движений, т. е. для случая торможения или разгона поезда на пролете моста.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бондарь Н. Г. Взаимодействие железнодорожных мостов с подвижным составом / Н. Г. Бондарь, Ю. Г. Козьмин, З. Г. Ройтбурд и др. – М.: Транспорт, 1984 – 272 с.
2. Гарг В. К., Дуккипати Р. В. Динамика подвижного состава. / Под ред. Н. А. Панькина. – М.: Транспорт, 1988 – 391 с.
3. Кравец В. В. Математическая модель пространственных колебаний сталежелезобетонного пролетного строения / В. В. Кравец, С. Е. Блохин // Динамические характеристики механических систем - К.: Наукова думка, 1984, – С. 48–53.
4. Лурье А. И. Аналитическая механика. – М.: Физмат, 1961 – 820 с.
5. Ишлинский А. Ю. Классическая механика и силы инерции. – М.: Наука, 1987 – 320 с.
6. Ушкалов В. Ф. Математическое моделирование динамики рельсовых транспортных средств / В. Ф. Ушкалов, Л. М. Резников, В. С. Иккол и др. – К.: Наукова думка, 1989 – 240 с.
7. Fryba L. Dynamics Of Railway Bridges – Academia Praha, 1996 – 331 p.

Поступила в редколлегию: 30.03.2007.