ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського
національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТУ ТА ЕКОНОМІКИ

УДК [517.5:519.8:004.9]-047.58

А. А. БОСОВ[1], В. М. ИЛЬМАН[2], Н. В. ХАЛИПОВА[3*]

[1]Каф. «Прикладная математика», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел./факс +38 (056) 373 15 36, эл. почта AABosov@i.ua, ORCID 0000-0002-5348-2205
[2]Каф. «Компьютерные информационные технологии», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени академика В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел./факс +38 (056) 373 15 35, эл. почта valeriy.ilman@ukr.net, ORCID 0000-0003-0983-8611
[3*]Каф. «Транспортные системы и технологии», Университет таможенного дела и финансов, ул. Дзержинского, 2/4, Днепропетровск, Украина, 49000, тел. +38 (056) 46 95 98, эл. почта khalipov@rambler.ru, ORCID 0000-0001-5605-6781

МНОЖЕСТВЕННЫЕ ОБЪЕКТЫ

Цель. Развитие сложных технологий производственных и управленческих процессов, систем информатики, прикладных объектов теории систем и др. требует усовершенствования математических методов, новых подходов для исследований прикладных систем. А многообразие и разнородность предметных систем делают необходимым разработку модели, обобщающей классические множества и их развитие – множества множеств. Множественные объекты, в отличие от множеств, конструируются множественной структурой и сами представляются структурой и содержанием. Целью работы является анализ множественной структуры, порождающей множественные объекты, дальнейшее развитие операций над такими объектами в прикладных системах. **Методика.** Для достижения целей исследования множественная структура объектов представляется конструктивной тройкой, состоящей из носителя, сигнатуры и аксиоматики. Множественный объект определяется структурой и содержанием, а также представляется гибридной суперпозицией, составленной из множеств, мультимножеств, упорядоченных множеств (списков) и неоднородных множеств (последовательностей, кортежей). **Результаты.** В работе рассмотрены свойства и характеристики компонентов гибридных множественных объектов сложных систем, предложены оценки их сложности, приведены правила выполнения внутренних и внешних операций на объектах. Введены отношения произвольного порядка над множественными объектами, определено понятие функции и отображения на объектах множественной структуры. **Научная новизна.** В настоящей работе рассмотрены вопросы развития множественной структуры, порождающей множественные объекты. **Практическая значимость.** Переход от абстрактной множественной структуры к предметной структуре требует трансформации системы и множественных объектов. Трансформация предполагает три последовательных этапа: спецификацию (привязку к предметной области), интерпретацию (множественных объектов) и конкретизацию (цели). Предложенный подход описания систем на основе гибридных множеств может быть использован во многих прикладных системах для структурного и содержательного анализа. Приведен пример применения гибридных множеств для моделирования логистических систем.

Ключевые слова: конструктивная множественная структура; гибридные множественные объекты; моделирование; сложные системы; множества; списки; мультимножества; кортежи; логистическая система

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)
Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

Введение

Развитие сложных технологий производственных и управленческих процессов, систем информатики, прикладных объектов теории систем и др. требует усовершенствования математических методов, новых подходов для исследований прикладных систем [7].

Примером сложной системы является железная дорога, включающая совокупности: станций, вагонных и локомотивных депо, вокзалов, подвижного состава и пр. Для моделирования сложных систем обычно используют структурный подход, задавая их элементы связанными множествами [9, 10]. Анализ работы железной дороги на основе структурного моделирования приведен в монографии [1].

Возможности и особенности применения методологии системного анализа при решении проблем транспортных узлов рассмотрены в монографии [12].

Описание систем с помощью конечных множеств и отношений выполнено в работе [21] и структур в статье [2]. Такие сложные объекты, как станции, депо следует представлять упорядоченными по определенному критерию (подчинения, места положения и др.) элементами списков, поезда представлять как мультимножества вагонов и т.д. Таким образом, в моделях реальных систем возникают разнообразные гибридные конструкции множественных объектов, аппарат которых требует развития. Кроме того, развитие аппарата множественных объектов приведет к совершенствованию задач исследования операций, представления абстрактных структур данных информатики и др. [23].

В работе [3] предложен математический подход исследований на основе множественной структуры (множество множеств, множество списков, функций множеств) и дано его применение к прикладным задачам инженерии.

Цель

В работе рассмотрены вопросы дальнейшего развития множественной структуры, порождающей множественные объекты. Множественная структура объектов задается конструктивной тройкой, состоящей из носителя, сигнатуры и аксиоматики. Сам же множественный объект определяется двумя компонентами – структурой и содержанием. Множественный объект представляется гибридной суперпозицией, составленной из множеств, мультимножеств, упорядоченных множеств (списков) и неоднородных множеств (последовательностей, кортежей). Рассмотрены свойства и характеристики компонент множественных объектов, предложены оценки их сложности, приведены правила выполнения внутренних и внешних операций на объектах. Введены отношения произвольного порядка над множественными объектами, определено понятие функции и отображения на объектах множественной структуры.

Методика

Представление и задание множественных объектов. Как правило, объекты как классической, так и конструктивной математики создаются на ее базисных элементах, таких как множество, мультимножество, упорядоченное множество (список), неоднородное множество (кортеж), отношение, операция и другое. Основой определения части этих элементов является множество, которое в математике определяется аксиоматически, а в прикладной математике − понятийно [18].

Конструктивно под множеством понимается свободный набор различных однотипных элементов. Элементы в наборе свободны в том смысле, что во множество они входят в произвольном порядке. Изменяя свойства набора и элементов множественной структуры, получим другие объекты. Если во множестве снять ограничение по различным элементам, то получим мультимножество. Не свободный однотипный набор различных элементов по некоторому отношению образует упорядоченное множество (списочное множество), в случае повторяемости элементов в наборе имеем мультисписок. Если набор разнотипный, то соответственно он образует неоднородную упорядоченную или неупорядоченную последовательности или кортежи, мультикортеж упорядоченный или неупорядоченный. Таким образом, рассмотренные объекты задаются на единой множественной структуре M с помощью отношений: тождества, порядка, неоднородности и пр. Формально эта структура может быть представлена как специализация обобщенной порождающей структуры [5, 19]:

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)
Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

$$M = (N, \Sigma, \Lambda), \qquad (1)$$

где $N = G \bigcup F$ – носитель структуры, на компоненте G которого строятся множественные объекты и $F = (\{,\}, [,], \rangle, (,), \cdot, \langle, [\![,]\!])$ – алфавит специальных символов; Σ – сигнатура отношений $\phi_i, i = \overline{1, 4}$ и операции суперпозиции ψ; Λ – конструктивная аксиоматика, задающая определения, свойства, правила конструирования объектов и пр.

Интерпретация структуры (1) может быть выполнена для определенной задачи предметной области, например, при проектировании логистических цепей поставки товаров [16, 17], при моделировании в задачах взаимодействия подвижного состава и железнодорожного пути [15].

Рассмотрим состав аксиоматики Λ множественной структуры M.

Аксиоматика базисных объектов:

– компонента $G = G_1 \bigcup G_2 \bigcup ... \bigcup G_n$ носителя неоднородна,

– $G_i, i = \overline{1, n}$ однородны (однотипны);

– $\# G_i$ – мощность содержания подкомпоненты;

– если $\# G_i = 0$, то подкомпонента пустая, и обозначается как $G_i = o$;

– элемент $s \in G$, если $\exists G_i \subset G, s \in G_i$;

– любой элемент $s \in G$ неделим (атомарный).

Определение 1. Отношение φ_1 на наборе $(s_1, s_2, ..., s_r) \subseteq G_i^r$ задает множество, если элементы в наборе различны и любое бинарное отношение ϕ, через которое представляется отношение

$$\varphi_1(s_1, s_2, ..., s_r) = \varphi(s_{k_1}, s_{k_2}) \oplus \varphi(s_{k_2}, s_{k_3}) \oplus,$$

$$\oplus \varphi(s_{k_3}, s_{k_4}) \oplus ... \oplus \varphi(s_{k_{r-1}}, s_{k_r}) \qquad (2)$$

обладает свойством $\varphi(s_{k_i}, s_{k_j}) = \varphi(s_{k_j}, s_{k_r})$. Здесь $\oplus$ – операция свертки де Моргана бинарных отношений.

Определение 2. Отношение φ_2 на наборе $(s_1, s_2, ..., s_r) \subseteq G_i^r$ определяет мультимножество, если это отношение задает множество и элементы в наборе $(s_1, s_2, ..., s_r)$ не все различны.

Определение 3. Отношение ϕ_3, представленное в виде (2) через отношение некоторого порядка ϕ, задает упорядоченное множество по определению 1 или частично упорядоченное мультимножество по определению 2.

Определение 4. Отношение φ_4 по представлению (2) определения 1 задает неоднородное множество (мультимножество) и по определению 3 − неоднородное частично упорядоченное множество.

Определение 5. Заданные определениями 1 – 4 множества назовем базисными множественными объектами O_j^0 нулевого уровня.

Для распознания объектов и отражения отношения на них используем обозначения: $\{\cdot\}$ – множество, $[\cdot]$ – упорядоченное множество, $[\![\cdot]\!]$ – неоднородное множество, $\langle\cdot\rangle$ – мультимножество. Здесь символ «$\cdot$» предполагает наличие содержания $S = (s_1, s_2, ..., s_r)$ объекта O_j^0, возможно пустого.

Объект O_j^0, порожденный множественной структурой M, будем записывать так $O_j^0 \lrcorner M$.

Конкретное содержание $S \subset G$ базисного объекта задается перечислением его элементов $s_j \in S$ или иным способом.

Если объект имеет пустое содержание (пустой объект), то он представляется $(o, o, ..., o)$ или (o), где под круглыми скобками подразумеваются любые из скобок объектов.

Аксиоматика множественных объектов. На множественной структуре M, конструктивно с помощью операции суперпозиции ψ можно задать более сложные объекты разных уровней сложности. Например, нулевой уровень сложности определяют базисные объекты, первый уровень сложности: множества множеств, списки списков и так далее, второй уровень – списочные множества списков и пр.

Объект O_i^k k-го уровня сложности, порожденный множественной структурой M, определяется рекурсивно:

1) $O_j^0 \lrcorner M$;

2) $O_i^1 = \psi(O_j^0)$, $O_i^1 \lrcorner M$;

doi: 10.15802/stp2015/46075

3) $O_i^2 = \psi(O_q^0, O_j^1)$, $O_i^2 \lrcorner M$;

4) $k+1$) $O_i^k = \psi(O_{j_0}^0, O_{j_1}^1, ..., O_{j_{k-1}}^{k-1})$, $O_i^k \lrcorner$.

Рекурсия выполняется над объектами с пустым содержанием и объекту на последнем уровне приписывается необходимое содержание.

Любой объект $O_i^k \in E$ имеет определенное *строение-структуру* и *содержание*.

Структура порожденного объекта отражает иерархическую подчиненность дочерних объектов родительскому множественному объекту.

Структура сложного объекта гибридная. Она включает в себя структуры подчиненных объектов разных типов и упорядоченная по этим типам.

Структура $C(O_i^k)$ объекта O_i^k задается *структурным деревом* или *структурной формой,* составленной из элементарных форм $l \in \left\{\{\}, [], [\![\,]\!] u \langle\ \rangle\right\}$.

Так структура объекта O_i^4, представленная структурной формой, может иметь вид

$$C(O_i^4) = \langle\, [\, [\![\cdot]\!], \{\cdot\}, \{\cdot\}, [\![\cdot]\!]\,], \{\, \langle\, \{\cdot\}, \{\cdot\} \rangle, \langle\, [\cdot], [\cdot], \{\cdot\}\, \rangle\, \}, \{\, \{\cdot\}, \{\cdot\}\, \}, [\![\cdot]\!], [\![\cdot]\!]\, \rangle . \quad (3)$$

В структуре (3) внешние скобки $\langle\rangle$ (*основная форма*) соответствуют родительскому объекту O_i^4, а формы первого уровня $([], \{\}, \{\}, [\![\,]\!], [\![\,]\!])$ также как и других старших уровней – дочерние. Отметим, что местоположение любой элементарной формы в структурной форме, в общем случае, определяется уровнем, местом на нем и положением в месте уровня. Например, для первого уровня и первого места на нем $[]$ имеем первую или четвертую форму $[\![\,]\!]$.

В структурном дереве вершинами являются элементарные формы, а дуги отражают подчиненность форм объектов по уровням. Вершине дерева (основной форме) соответствуют скобки родительского объекта нулевого уровня, а его листьям вершины, не имеющие подчинения. На рис. 1 приведено структурное дерево, отображающее представленную выражением (3) структуру.

Содержание сложного множественного объекта определяется содержанием (S_j) базисных объектов O_j^0.

Содержание D объекта O_i^k определим последовательностью содержаний (S_j), листьев в структуре $C(O_i^k)$. Например, для объекта O_i^4 со структурой (3) его содержание задается выражением $D(O_i^4) = ([\![S_1]\!], \{S_2\}, ..., [\![S_{13}]\!]$ или $D(O_i^4) = (S_1; S_2; ...; S_{13})$. В первом случае явно указаны типы содержания, во втором случае тип содержания определяется по структуре объекта.

По структуре $C(O_i^k)$ и содержанию $D(O_i^k)$ однозначно задается множественный объект O_i^k, т.е.:

– любой множественный объект O_i^k задается упорядоченной парой $O_i^k = (C, D)$;

– объект без содержания $O_i^k = (C, (o))$ – пустой и его структура – схема.

Объект, имеющий одно содержание и структуру нулевого уровня – базисный.

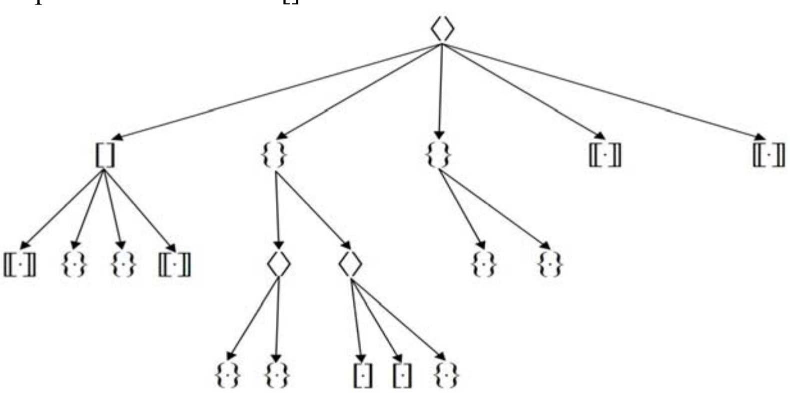

Рис. 1 Структурное дерево $C(O_i^4)$

Fig. 1 Structure tree $C(O_i^4)$

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)
Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

Класс объектов E множественной структуры M представляется упорядоченной парой классов структур E_C и содержаний E_D, т.е. $E = (E_C, E_D)$.

Рассмотрим теперь подобъекты множественных объектов и их составляющих.

Подсодержания, подструктуры и подобъекты множественных объектов. Важным для множественных объектов является понятие принадлежности или непринадлежности ему некоторого элемента x. Так как множественный объект определяется его структурой и содержанием, то можно ставить этот вопрос по отношению к содержанию или по отношению к объекту. При этом возможны случаи:

1) если $x \in D(O_i^k)$ и $k = 0$, тогда $x \in O_i^0$;

2) если $x \in O_i^0$, то $x \in D(O_i^0)$;

3) если $x \in D(O_i^k)$ и $k \geq 1$, то $x \in O_i^k$ или $x \notin O_i^k$;

4) если $x \in O_i^k$, то $x \in D(O_i^k)$.

Отношения принадлежности элемента содержанию и множественному объекту имеют свои особенности. Рассмотрим особенности принадлежности содержанию.

Так как содержание множественного объекта определяется через содержание базисных объектов разного типа, которые могут быть упорядочены или неупорядочены, то отношение принадлежность $s \in (S)$ есть множественным или списочным. Отношение принадлежности и порожденные им классы подмножеств, включений и прочее изложены в теории множеств [18]. Отношения списочной принадлежности как упорядоченных множеств рассмотрено в работах [3, 14.]. В общем случае отношение $s \in D(O_i^k)$ предполагает наличие места в последовательности содержаний базисных объектов, которым принадлежит данный элемент s.

Определение 6. D_1 есть *подсодержанием* содержания D объекта O_i^k, если $\forall s \in (S) \subset D_1$ и это записывается так $D_1 \subset D(O_i^k)$.

Структура объекта $C(O_i^k)$ представляет самостоятельный интерес. Исследования структуры объекта проведем с помощью путей подчинения.

Определение 7. Путем подчинения в структуре $C(O_i^k)$ называется последовательность связанных подчинением дочерних форм объекта O_r^m, т.е. $h_{rj} = (l_r, l_{r_i}, ..., l_j)$. Форма l_r называется *префиксом*, а форма l_j – *суффиксом пути*.

Пути подчинения множественной структуры объекта O_i^k покрывают всю структуру и их мультимножество обозначим символом $H(O_i^k)$.

Длина пути подчинения $|h_{ij}|$ определяется как количество связей подчинений между составляющими пути h_{ij}. Путь подчинения h_{ij}, длина которого равна нулю, есть *вырожденный*. Путь с длиной один называется *элементарным путем*.

Структура объекта пустая $C = (o) \in H$, если длина любого ее пути $|h_{ij}| = 0$.

Очевидно, что любой путь $h \in H$ составлен из вырожденных или элементарных путей.

Всякий путь мультимножества H может оканчиваться базисным объектом $(\cdot)$ или не оканчиваться ним. В первом случае путь назовем порождающим некоторый множественный объект, во втором − непорождающим.

Определение 8. Порождающий путь в мультимножестве $H(O_i^k)$ называется *полным* $\bar{h}$, если его префикс есть объектом нулевого уровня структуры $C(O_i^k)$.

Введем алгебру на мультимножестве путей $H(O_i^k)$ так, что $A = (H, \Xi)$ и пусть сигнатура Ξ задается множествами операциями и отношениями $\{=, \prec, \subset\}$.

Два пути $h_1, h_2 \in H$ одинаковы $(h_1 = h_2)$, если совпадают их последовательности связанных подчинением одинаковых форм. Одинаковые пути присутствуют в мультимножестве H с определенной кратностью.

Для любого невырожденного пути $h_{mj} \in H$ и элементарного пути $h_{r,r+1}$ имеет место $h_{r,r+1} \prec h_{mj}$ или $h_{r,r+1} \nprec h_{mj}$.

Определение 9. Путь h_1 есть *подпутем* пути

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)
Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

h, т.е. $h_1 \subset h$, если $\forall h_{r,r+1} \prec h_1$, то справедливо $h_{r,r+1} \prec h$.

Рассмотрим правило выполнения операции $\cup \in \Xi$.

Если подпуть h_j является суффиксом пути h_1 и префиксом для h_2, то $h_1 \cup h_2 \in H$.

Очевидно, что имеет место теорема.

Теорема 1. Любой путь мультимножества H можно дополнить до полного пути.

Пусть h_k есть некоторый подпуть полного пути $\overline{h}_i \in H$ и $\{h_{ij}\} \subset H$ множество путей дополняющих – h_k до пути $\overline{h}_i$.

Определение 10. Классом, образованным путем $\overline{h}_i$ и путями $\{h_{ij}\}$, дополняющими подпути $h_k \subset \overline{h}_i$ до пути $\overline{h}_i$, называется $K_i = \{\overline{h}_i, \{h_{ij}\}\}$.

Теорема 2. Множество путей H разбивается на классы K_i так, что $H = \bigcup_i K_i$.

Данная теорема является следствием теоремы алгебры разбиения множества на классы [8, 9].

Определение 11 Структура C_r есть *подструктурой* множественной структуры $C(O_i^k)$, $C_r \subset C(O_i^k)$, если $\forall h_r \prec C_r$, то справедливо $h_r \prec C(O_i^k)$.

Определение 12. Подструктура $C_r \subset C(O_i^k)$ называется порождающей, если в ней найдется хотя бы один порождающий путь подчинения.

Подструктуры $C_1, C_2 \subset C(O_i^k)$ одинаковы ($C_1 = C_2$), если $\forall h(C_1), \exists h(C_2)$, $h(C_1) \prec h(C_2)$ и наоборот − $\forall h(C_2), \exists h(C_1)$, $h(C_2) \prec h(C_1)$.

Объекты $O_1^i, O_2^i \in E$ эквивалентны $O_1^i \sim O_2^j$, если $D(O_1^i) = D(O_2^j)$ и $C(O_1^i) = C(O_2^j)$.

Множество эквивалентных объектов $O_j^r \sim O_i^k$ образуют класс эквивалентности $Q(O_i^k)$.

Объект $O_1 = (C_1, D_1)$ назовем *подобъектом* $(O_1 \subset O_i^k)$ множественного объекта $O_i^k = (C, D)$, если $C_1 \subset C$ и $D_1 \subset D$. Множество всех подобъектов объекта $O_i^k \in E$ образуют *класс подобъектов* $\wp(O_i^k)$. При этом для класса подобъектов справедливы свойства:

1) $\wp \subset E$;

2) префиксы полных путей структур подобъектов и объекта могут не совпадать;

3) $\forall O_1 \in \wp$, $\exists O_2 \in \wp$, $D_1(O_1) = D_2(O_2)$ и $C_1(O_1) \not\subset C_2(O_2)$ или $C_2(O_2) \not\subset C_1(O_1)$;

4) пустые объекты $(C, (o)), ((o), (o)) \in \wp$, здесь C – схема подчинения;

5) базисный объект $((\cdot), (S)) \in \wp$;

6) $\wp_0 = \{((o), (o))\} = \varnothing \subset \wp_i$.

Сложность множественных объектов. Обычные множества характеризуются единственным показателем сложности – мощностью. Для множественных объектов одним показателем мощности невозможно обойтись, так как объекты задаются сложнее.

Если сложность $\vartheta(O_i^k)$ множественного объекта O_i^k, то из его задания следует представление сложности ϑ через сложности θ структуры и содержания объекта, т.е. сложность объекта определяется парой $\vartheta(O_i^k) = (\theta(C_i), \theta(D_i))$.

В общем, категория сложности ϑ любого множественного объекта удовлетворяет четырем аксиомам сложности систем из пяти [7]:

– если $O_1 \subset O_i^k$, то $\vartheta(O_i^k) \ge \vartheta(O_1)$, здесь отношение $(\ge)$ над сложностями объектов понимается как отношения над сложностями их структур $\theta(C_i) \ge \theta(C_1)$ и содержаний $\theta(D_i) \ge \theta(D_1)$;

– если множество подобъектов $\{O_{rj}\} \subset \wp(O_i^k)$ вдоль полных порождающих путей $\overline{h}_{rj} \prec C(O_i^k)$, то $\vartheta(O_i^k) = \max_r \vartheta(O_{rj})$, здесь операция $\max_r \vartheta(O_{rj}) = (\max_r \theta(C_{rj}), \max_r \theta(D_{rj}))$;

– $\vartheta(O_i^k) \le \sum_j \vartheta(O_{rj})$, из этой аксиомы следует, что $\theta(C_i) \le \sum_j \theta(C_{rj})$ и $\theta(D_i) \le \sum_j \theta(D_{rj})$;

– $\vartheta((o, o)) = 0$.

Последняя аксиома отражает факт существования подобъекта в классе $\wp(O_i^k)$ с пустой схемой и пустым содержанием, сложность ко-

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

торого принимается нулевой.

Представление сложности множественного объекта через компоненты сложности его структуры и содержания позволяет разносторонне характеризовать множественный объект. Рассмотрим некоторые измерения сложности множественного объекта.

Объем содержания множественного объекта O_i^k – $\theta_1(D(O_i^k))$, для которого сложность измеряется количеством компонент $(S_j) \in D(O_i^k)$ или количеством листьев структурного дерева объекта. Например, для формы (3) $\theta_1(D(O_i^4)) = 13$.

Объем структуры множественного объекта O_i^k – $\theta_1(C(O_i^k))$ измеряется количеством элементарных форм структуры или количеством вершин структурного дерева. Так для формы (3) $\theta_1(C(O_i^4)) = 19$.

Объем множественного объекта $\vartheta_1(O_i^k) = (\theta_1(C_i), \theta_1(D_i))$, таким образом $\vartheta_1(O_i^4) = (19, 13)$.

Мощность содержания множественного объекта $\theta_2(D(O_i^k))$ можно измерять так: $\theta_2(D(O_i^k)) = \max\limits_j \{\# S_j; S_j \in D(O_i^k)\}$ или так: $\theta_2(D(O_i^k)) = \sum\limits_j \# S_j$.

Сложность структуры объекта можно определять *числом подчинения структуры множественного объекта* −

$$\theta_3(C(O_i^k)) = \min_j \{| h_{1j} |; h_{1j} \prec C(O_i^k)\},$$

избыточным числом подчинения

$$\theta_4(C(O_i^k)) = k - \theta_3(C(O_i^k)).$$

Например, для структуры (3) сложности $\theta_3(C(O_i^4)) = 2$ и $\theta_4(C(O_i^4)) = 2$, а для базисного объекта число подчинения $\theta_3((\cdot)) = 0$ и $\theta_4((\cdot)) = 0$.

Количество уровней объекта O_i^k также можно определить через измерение сложности $\theta_5(C(O_i^k)) = k = \max\limits_j \{| h_{1j} |\} + 1$.

Очевидно, рассмотренные измерения сложности множественных объектов и их компонент удовлетворяют приведенным аксиомам сложности.

Операции над множественными объектами. Исходя из того, что множественные объекты определяются компонентами структуры и содержания, операции над объектами должны выполняться над их компонентами.

Пусть (*) − некоторая бинарная операция, тогда для любых объектов O_1, O_2 можно формально записать $O_1 * O_2 = (C_1 * C_2, D_1 * D_2)$. Укажем на очевидные свойства и особенности этой операции:

– операция (*) допустима к объектам O_1 и O_2, если она применима к соответствующим структурам и содержаниям;

– правила выполнения операции зависят от структуры и содержания объектов и различны для содержания и структуры;

– операция (*) в общем случае не коммутативна и не всегда ассоциативна;

– $\forall O_1, O_2 \in \wp$ − результат операции $O_1 * O_2 \in \wp$ или $O_1 * O_2 \notin \wp$, но всегда $O_1 * O_2 \in E$.

Сначала приведем основные теоретические сведения о множественных операциях над некоторыми базисными объектами O_i^0 и O_j^0.

Известно [20, 22], что к мультимножествам применимы операции обычного объединения $(\bigcup)$ и объединения со сложением $(\uplus)$, обычного пересечения $(\bigcap)$ и пересечения с умножением $\left(\underset{\times}{\cap}\right)$, разности $(\setminus)$, симметрической разности (Δ) и др., которые $\forall \langle S_i \rangle, \langle S_j \rangle \in E_D$ выполняются по правилам:

$$\langle S_i \rangle \bigcup \langle S_j \rangle = \langle s; s \in \langle S_i \rangle \,|\, \langle S_j \rangle,\ m(s) = \\ = \max\{m_{\langle s_i \rangle}(s), m_{\langle s_j \rangle}(s)\}\rangle,$$

$$\langle S_i \rangle \uplus \langle S_j \rangle = \langle s; s \in \langle S_i \rangle \,|\, \langle S_j \rangle,\ m(s) = \\ = m_{\langle s_i \rangle}(s) + m_{\langle s_j \rangle}(s)\rangle,$$

$$\langle S_i \rangle \bigcap \langle S_j \rangle = \langle s; s \in \langle S_i \rangle \& \langle S_j \rangle,\ m(s) = \\ = \min\{m_{\langle s_i \rangle}(s), m_{\langle s_j \rangle}(s)\}\rangle,$$

$$\langle S_i \rangle \underset{\times}{\cap} \langle S_j \rangle = \langle s; s \in \langle S_i \rangle \& \langle S_j \rangle, m(s) = \\ = m_{\langle s_i \rangle}(s) + m_{\langle s_j \rangle}(s)\rangle,$$

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського
національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

$$\langle S_i\rangle \supseteq \langle S_j\rangle, \langle S_i\rangle \setminus \langle S_j\rangle =$$

$$= \langle s; s \in \langle S_i\rangle \& s \notin \langle S_j\rangle, m(s) =$$

$$= m_{\langle s_i\rangle}(s) - m_{\langle s_i\rangle \cap \langle s_j\rangle}(s)\rangle,$$

$$\langle S_i\rangle \cap \langle S_j\rangle \neq \varnothing, \langle S_i\rangle \Delta \langle S_j\rangle =$$

$$= (\langle S_i\rangle \setminus \langle S_j\rangle) \cup (\langle S_j\rangle \setminus \langle S_i\rangle).$$

Здесь $m(s)$ – кратность элемента s на соответствующем мультимножестве.

Для упорядоченных множеств или мультимножеств O_1^0 и O_2^0 операции $(\cup)$ и $(\cap)$, в общем, не допустимы, т.к. отношения порядков на объектах O_1^0 и O_2^0 могут быть различными. А операции $(\uplus)$, $(\cap)$, $(\setminus)$ и (Δ) могут быть реализованы различными способами [3, 19]. Воспользуемся идеями правил этих операций из работы [3]

$$[S_i] \uplus [S_j] = [\![s; s \in [[S_i],[S_j]],$$

$$m(s) = m_{[S_i]}(s) + m_{[S_j]}(s)]\!] \quad ;$$

$$[S_i] \underset{\times}{\cap} [S_j] = [\![s; s \in [[S_i] \uplus [S_j] \& [S_i] \&$$

$$\& [S_j]], m(s) = m_{[S_i]}(s) + m_{[S_j]}(s)]\!] \quad , (4)$$

при этом $\#([S_i] \underset{\times}{\cap} [S_j]) = \#([S_i] \uplus [S_j])$ и если элементы $s \notin [[S_i] \uplus [S_j] \& [S_i] \& [S_j]]$, то они заменяются в выражении $[S_i] \uplus [S_j]$ пустым символом o;

$$[S_i] \supseteq [S_j],$$

$$[S_i] \setminus [S_j] = \left[\begin{array}{l} s; s \in [S_i] \& s \notin [S_j], m(s) = \\ \quad = m_{[s_i]}(s) - m_{[s_i] \cap [s_j]}(s) \\ s = o; s \in [S_i] \& s \in [S_j], \end{array} \right. \quad (5)$$

здесь $\#([S_i] \setminus [S_j]) = \#[S_i]$;

$$[S_i] \underset{\times}{\cap} [S_j] \neq \varnothing,$$

$$[S_i] \Delta [S_j] = \left[\begin{array}{l} s; s \in [S_i] \uplus [S_j] \& [S_i] \setminus [S_j] \& \\ \quad \& [S_j] \setminus [S_i], \\ s = o; s \in [S_i] \uplus [S_j] \& \\ \& s \notin [S_i] \setminus [S_j] \& s \notin [S_j] \setminus [S_i]. \end{array} \right. , \ (6)$$

при этом имеет место свойство

$$\#([S_i] \Delta [S_j]) = \#([S_i] \uplus [S_j]).$$

Операции $(\uplus)$ и $\left(\underset{\times}{\cap}\right)$ могут выполняться над упорядоченными объектами разных типов, поэтому их результатом являются неоднородные объекты. А операции $(\setminus)$ и (Δ) выполнимы только над однотипными базисными объектами.

Заметим, что операция объединения со сложением допускает обобщение на универсуме E_D через декомпозицию первого места объединения. Назовем ее операцией *объединения со сложением по месту* $(\uplus_g)$ и определим ее правилом:

$$[S_i] \uplus_g [S_j] = [s_{i_1}, ..., s_{i_g}, s_{i_{g+1}}, ..., s_{i_m}] \uplus_g$$

$$\uplus_g [s_{j_1}, .s_{j_2}, ..., s_{j_k}] =$$

$$= [\![s; s \in [s_{i_1}, ..., s_{i_g}, s_{j_1}, .s_{j_2}, ..., s_{j_k},$$

$$s_{i_{g+k+1}}, ..., s_{i_{m+k}}],$$

$$m(s) = m_{[S_i]}(s) + m_{[s_j]}(s)]\!]. \quad (7)$$

При этом порядок следования элементов в результирующем списке правила (7) частично меняется.

Так как правила операций $\left(\underset{\times}{\cap}\right)$ и (Δ) определены через операцию объединения, то они также допускают обобщения на основе правила (7).

Из того, что содержание объекта произвольного уровня упорядочено по порядку следования его базисных объектов, над любыми содержаниями D_i и D_j множественных объектов O_i^k и O_j^r можно выполнить рассмотренные операции, приняв за элементы в правилах операций базисные объекты. Так операция $\uplus_g$ над содержаниями D_i и D_j выполняется по форме правила (7):

$$D_i \uplus_g D_j = (S_{i_1}, ..., S_{i_g}, S_{i_{g+1}}, ..., S_{i_m}) \uplus_g$$

$$\uplus_g (S_{j_1}, .S_{j_2}, ..., S_{j_k}) =$$

$$= (S_{i_1}, ..., S_{i_g}, S_{j_1}, .S_{j_2}, ..., S_{j_k},$$

$$S_{i_{g+k+1}}, ..., S_{i_{m+k}}),$$

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)
Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

а операция разности $(\backslash)$ – по форме правила (5):

$$D_i \supseteq D_j,$$

$$D_i \setminus D_j = \begin{pmatrix} S; (S) \tilde{\in} D_i \& (S) \tilde{\notin} D_j, \\ S = (o); (S) \tilde{\in} D_i \& (S) \tilde{\in} D_j \end{pmatrix},$$

где под отношением $\tilde{\in}$ понимается принадлежность элемента (S) содержанию D по имени или значению и по типу.

Для распространения рассмотренных операций на структуры подчинения множественных объектов необходимо ввести дополнительные операции.

Операция $(\bullet)$ *прививки структуре* C элементарной формой.

Пусть $()_j$, $j = \overline{1,4}$, любая элементарная форма без содержания и пусть заданная форма также без содержания – $()_{iq}^k \prec C$, расположенная на месте q уровня k, тогда операция $(\bullet)$ действует по правилу:

$$() \bullet C = ()_j \bullet (()_{iq}^k \prec C) = (...,()_{jr},...)_{iq}^k \prec C_1. \quad (8)$$

Правило (8) позволяет получить в структуре C_1 *привитую почку* $()_{jr}$, расположенную на месте r в форме $()_{iq}^k$, при этом $0 \le k < n$, где n – число уровней структуры C.

Операция объединение структур $C_1 \overline{\uplus} C_2$ допустима, если в структуре C_1 имеется почка, совпадающая с основной формой структуры C_2. Поэтому эта операция выполняется конструктивно с помощью алгоритмической схемы:

1) определяется место прививки на структуре C_1 (уровень, место на нем элементарной формы и местоположение почки в выбранной форме);

2) основная форма структуры C_2 принимается за прививаемую элементарную форму;

3) выполняется операция прививки;

4) почка в структуре C_1 заменяется структурой C_2.

Формально эта операция представляется выражением через пути подчинения структур

$$C_1 \overline{\uplus} C_2 = \{h, h \prec C_1 \mid C_2\}, \quad (9)$$

$h \prec C_1 \mid C_2$ – означает, что $h \prec C_1$ или $h \prec C_2$.

Операция разности $(\overline{\backslash})$ структур C_1 и C_2, в зависимости от поставленной цели, может конструктивно выполняться различным образом, например, через удаление их общего пути подчинения или удаления общего суффикса путей и пр.

Пусть образующие пути $\{\overline{h}_{1i}\}, \{\overline{h}_{2j}\}$ структур C_1 и C_2 такие, что $\{\overline{h}_{2j}\} \subset \{\overline{h}_{1i}\}$, тогда процесс удаления любого пути $\{\overline{h}_j\} \in \{\overline{h}_{2j}\}$ выполняется поэтапно:

1) удаляется суффиксная форма пути в структуре C_1;

2) затем удаляется следующая форма (справа налево) пути в структуре C_1;

3) пункт 2 выполняется до тех пор, пока не будет пройден путь $\overline{h}_j$ или часть его до встречи с формой разветвления в структуре C_1 на пути $\overline{h}_i$;

4) в конец оставшейся части пути $\overline{h}_i$ прививается почка с пустым содержанием и типом начального суффикса пути $\overline{h}_i$.

Предпочтительна более простая процедура удаления общего суффикса путей $\overline{h}_i$ и $\overline{h}_j$, с последующей прививкой пустой почки типа удаленного суффикса так, что получим путь $\overline{h} = (...,(o)) \prec C_1$. При этом способе выполнения операции разности конструкция структуры C_1 сохраняется.

Отвлекаясь от технологического способа реализации операции разности структур, представим ее так

$$C_i \supset C_j,$$

$$C_i \setminus C_j = \begin{cases} \overline{h}; \overline{h} \prec C_i \& \overline{h} \not\prec C_j, \\ \overline{h} = (...,(o)); \overline{h}_j \prec \overline{h}_i, \\ ,\overline{h}_i \prec C_i, \overline{h}_j \prec C_j \end{cases}. \quad (10)$$

Операции пересечения $\left(\overline{\underset{\times}{\cap}}\right)$ и симметрической разности $(\overline{\Delta})$ над структурами выполняются по схеме правил (4) и (6) с использованием формул (9) и (10) и операций $(\overline{\uplus})$ и $(\overline{\backslash})$.

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

Теоретико-множественные операции над множественными объектами выполняются в комплексе над их структурами и содержаниями, например, объединение объектов $O_i^k(C_i, D_i)$ и $O_j^r(C_j, D_j)$ выполняется по правилу:

$$O_i^k \uplus O_j^r = (C_i \overline{\uplus} C_j, D_i \uplus_g D_j),$$

в котором место g определяется местоположением прививаемой почки в структуре подчинения C_i.

Отношения над множественными объектами. Комплексные операции над составляющими объектов выполняются по разным правилам, поэтому следует ожидать этого и относительно отношений над множественными объектами. Например, если ρ отношение над объектами универсума $E = (E_C, E_D)$, а ρ_C и ρ_D отношения над составляющими этих объектов, то отношение $\rho = (\rho_C, \rho_D)$ может иметь отношения по компонентам различных типов, свойств и пр. Исходя из того, что любое отношение произвольного порядка с помощью прямой суммы представляется через бинарные отношения (см. представление (2)), то в дальнейшем сосредоточим внимание в основном – на последних.

Принимаем, что отношения $\rho_C(C_1, C_2)$ и $\rho_D(D_1, D_2)$ согласованы, если пары (C_1, D_1) и (C_2, D_2) определяют объекты O_1^k и O_2^r, на которых задается отношение $\rho = (\rho_C, \rho_D)$. Отношения ρ_C и ρ_D могут применяться различным образом. Рассмотрим вначале способы организации отношений на содержаниях.

Пусть $(S_{1i}) \subset D_1$ и $(S_{2j}) \subset D_2$, тогда отношение $\rho_D((S_{1i}), (S_{2j}))$, определенное на однотипных или разнотипных подсодержаниях, может обладать или не обладать свойством однотипности. Например, если базисные содержания (S_{1i}) и (S_{2j}) есть множества, то отношение $\rho_D(\{S_{1i}\}, \{S_{2j}\})$ также множество (свойство однотипности), так как оно задается свободным набором пар (s_{ik}, s_{jq}), $s_{ik} \in S_{1i}$, $s_{jq} \in S_{2j}$. Если на декартовом произведении множеств задать отношение порядка p расположения пар в произведении, тогда отношение $\rho_D^p(\{S_{1i}\}, \{S_{2j}\})$ есть разнотипное, так как отношение ρ_D^p задает упорядоченное множество.

Для однотипных отношений или отношений с разными компонентами содержания (S_{1i}) и (S_{2j}) возможны свойства эквивалентности, толерантности и др.

В общем случае отношение $\rho_D(D_1, D_2)$ определяется суперпозицией пар $((S_{1i}), (S_{2j}))$ и (s_{ik}, s_{jq}), т.е.

$$\rho_D(D_1, D_2) = (s_{ik}, s_{jq}) \circ ((S_{1i}), (S_{2j})), \quad (11)$$

поэтому можно принять, что свойства отношения $\rho_D(D_1, D_2)$ по необходимости переносятся и на отношения этих пар и наоборот − одинаковые свойства пар приписываются отношению $\rho_D(D_1, D_2)$. То есть, если отношения на парах $((S_{1i}), (S_{2j}))$ и (s_{ik}, s_{jq}) обладают свойством рефлексии, то этим же свойством обладает и их суперпозиция. Очевидно, при наличии определенных свойств одной из составляющих отношения $\rho_D(D_1, D_2)$ следует говорить о частичном свойстве этого отношения.

Исходя из того, что множественные структуры объектов определяются упорядоченными системами образующих их полных путей подчинения $\bigcup_i \overline{h}_{1i} = C_1$, $\bigcup_j \overline{h}_{1j} = C_2$, то под декартовым произведением структур понимается произведение полных путей. Таким образом,

$$\rho_C(C_1, C_2) = \rho_C(\{\overline{h}_{1i}\}, \{\overline{h}_{2j}\}). \quad (12)$$

И теперь отношения на множественных объектах через формулы (11) и (12), определяются выражением:

$$\rho(O_1^k, O_2^r) = (\rho_C(C_1(O_1^k), (C_2(O_2^r)),$$
$$\rho_D(D_1(O_1^k), (D_2(O_2^r))).$$

Обобщение бинарного отношения на отношение m-го порядка для множественных объектов $O_i^{k_i} \in E, i = \overline{1, m}$ представляется как

$$\rho(O_1^{k_1}, O_2^{k_2}, ..., O_m^{k_m}) = (\rho_C(C_1, C_2, ..., C_m),$$

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)
Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

$$\rho_D(D_1, D_2, ..., D_m)). \qquad (13)$$

Функции множественных объектов. Отношение (13) допускает обобщение посредством нагружения связей отношения операциями, алгоритмами действий и пр., поэтому порождает обобщенное отображение части универсума E множественных объектов

$$F(E_1) = (F_C(E_{C_1}), F_D(E_{D_1}))$$

или на классе подобъектов

$$\wp(O_i^k) \,.\, F(\wp) = (F_C(\wp), F_D(\wp))$$

и определяет функции множественных объектов

$$F = (F_C, F_D) : O_1^{k_1} \times O_2^{k_2} \times ... \times O_m^{k_m} \to O_j^r .$$

Область определения и значений функции F могут быть различными: это сами объекты O_i^q и O_j^r или их подобъекты из класса $\wp(O_i^k)$ и способы получения результата функций также могут быть разными, в зависимости от структурной функции F_C и функции содержания F_D.

Структурная функция выделяет подструктуры объектов O_i^q, пути подчинения для доступа к содержаниям объектов, выполняет действия над выделенными структурами для получения структуры объекта O_j^r и др. А функция F_D выполняет действия над отдельными составляющими содержания и их подмножествами, подсписками и пр. [3] или над гибридными комплексами содержания.

Рассмотрим несколько примеров задания функций.

Пример 1. Пусть функция определена на множественном подобъекте $O_j^q \subset O_i^k$ таком, что $O_j^q = (\overline{h}_j, (S_j))$, правилом

$$F(O_j^q) = (\overline{h}_j, \sum_{s \in A((S_j))} f(s)),$$

где $A((S_j))$ – класс подсодержаний базисного числового содержания (S_j) и функция f – числовая. Очевидно, функция F задает множественный объект $O_i^q = (\overline{h}_j, (S'_j))$, для которого $\# S'_j = 1$.

Пример 2. Если множественный объект $O_i^k = (C, D)$, то функцию можно задать так

$$F(O_s^k) = (C, D'),$$

где содержание

$$D' = (D \setminus S_j) \uplus_j \sum_{s \in A((S_j))} f(s)$$

и функция f взята из примера 1.

Пример 3. Пусть словарная функция определена на множественном объекте по закону конкатенации $F_\otimes(C, D) = (f_\otimes(C), f_\otimes(D))$ так, что $f_\otimes(C) = \otimes(h_C^1, h_C^2) = h_C^3$, где h_C^1 и h_C^2 пути структурной схемы C, а результирующий схемный путь новой структуры задается выражением:

$$h_C^3 = \begin{cases} () \otimes () = (), \textit{если типы форм одинаковы} \\ () \otimes () = 0, \textit{если типы форм различны.} \end{cases}$$

И функция $f_\otimes(D) = (l_k)$, значение которой совокупность содержательных цепочек, задаваемых рекуррентным выражением:

1) $l = s_i \otimes s_j$,

2) $l = l \otimes s_{j,i} \mid s_{i,j} \otimes l$,

3) $l_k = l$.

Здесь $s_i \in S^1 \subset D$ и $s_j \in S^2 \subset D$, а подсодержания S^1 и S^2 порождены путями $\overline{h}^1$ и $\overline{h}^2$ структуры подчинения C.

Возможны определения более сложных словарных функций путем задания конструктивных продукций на грамматических порождающих структурах [19].

Результаты

Пример приложения множественных объектов. Во многих случаях прикладных исследований приходится принимать решения опираться на структуру предметной области, ее содержательную часть, функциональные связи и пр. Например, исследования в логистике проводятся на структурированных системах [11, 13, 16, 17].

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)
Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

Рассмотрим пример функционирования системы доставки грузов фирмами $F_i, (i = 1, 2, ..., n)$.

Пусть у фирм F_i имеются склады $Ci_j, j = 1, ..., m_i$, на которых хранятся товары $Ti_j, j = 1, ..., j_i$. Товары доставляются потребителю в контейнерах $Ki_k, k = 1, ...k_i$ транспортными средствами (автомобилями, железнодорожными поездами, воздушными и водными судами). Процесс доставки товаров проходит несколько этапов.

Рассмотрим простой четырехэтапный процесс:

1) выбор контейнеров и их загрузка товарами на складах.

2) выбор вида транспорта и отгрузка контейнеров со складов.

3) второй выбор вида транспорта и прохождение таможенного контроля.

4) третий выбор вида транспорта и перезагрузка на выбранный транспорт для доставки товаров на склад потребителя или прямая доставки товаров на склад потребителя.

Этапы процесса могут быть зависимыми или независимыми, или частично независимыми. Например, при зависимых этапах процесс доставки товаров реализует последовательное выполнение четырех этапов, при частичной зависимости может быть исключен из процесса третий этап. Каждый из этапов процесса доставки товаров связан с технологическими операциями обработки грузов, алгоритмами выбора и принятия решений. Анализ составных частей процесса показывает, что в этом процессе используются множества разных типов: списки (склады и операции), мультимножества (контейнеры, операции, транспорт), поэтому логические модели функционирования системы доставки товаров фирмами Fi целесообразно представлять с помощью интерпретированной множественной структуры (1).

Компонента G носителя (логистической) структуры (1) составлена из множеств: складов Ci, товаров Ti, контейнеров Ki, транспортных средств $T = \{at_q, gt_r, vt_p, ot_l$, используемых фирмами, операций Υ обработки грузов на определенных этапах технологического процесса, алгоритмов A_Y^X (X – входное множество, Y – множество решений) выбора, принятия решений и перехода на следующий технологический этап.

Так как фирмы могут иметь разные технологические процессы доставки товаров, то соответствующие им интерпретированные множественные объекты будут также различными. Пусть для фирмы F_1 множественный объект – O_{F1}^8 отражает технологию обработки товаров и грузов при международных доставках, и его структура задается формой:

$$C(O_{F1}^8 = \underset{1}{[}\underset{2}{\langle}\underset{3}{\llbracket} T1_{1j} \rrbracket, \underset{4}{[}\underset{5}{\llbracket}[\, A_{Y1}^K \underset{7}{[}\, A_{Y2}^T \underset{9}{[}\, A_{Y3}^T \underset{11}{[}\, A_{Y4}^T]\cdot$$

$$\cdot \underset{12}{[}\, \Upsilon_4]] \cdot \underset{10}{[}\, \Upsilon_3]] \cdot \underset{8}{[}\, \Upsilon_2]] \cdot \underset{6}{[}\, \Upsilon_1]]\rrbracket_{K1_1},$$

$$\llbracket\rrbracket_{K1_2}, ..., \llbracket\rrbracket_{K1_{k1}}]\rangle,$$

$$\langle C1_2 \rangle, ..., \langle C1_{m1} \rangle], \qquad (14)$$

в которой обозначение $\underset{1}{[\cdot]}$ определяет список складов, $\underset{2}{\langle\rangle}$ – мультимножество их содержаний: неоднородные множества товаров $\underset{3}{\llbracket\rrbracket}$ и списки контейнеров $\underset{4}{[\cdot]}$. При этом контейнер $\llbracket\cdot\rrbracket_{K1_j}$ подвержен выбору (вида контейнера или транспортного средства), по определенным спискам алгоритмов $(\underset{5}{[]}, \underset{7}{[]}, \underset{9}{[]}, \underset{11}{[\,]})$ и упорядоченной операционной обработке на каждом технологическом этапе $(\underset{6}{[]}, \underset{8}{[]}, \underset{10}{[\,]}, \underset{12}{[\,]})$. Связь списков алгоритмов A_Y^X и соответствующих операций Υ представлена через операцию последовательного выполнения $[A_Y^T] \cdot [\Upsilon]$.

Содержанием объекта $D(O_{F1}^8)$ являются товары, алгоритмы выбора и принятия решений, а также операции на четырех этапах технологических процессов.

Анализ структуры (14) и содержания объекта O_{F1}^8 позволяет выделить $8(k+1)m$ содержательных подобъектов, определяющих товары на складах и обработку контейнеров.

Эти подобъекты можно принять за систему образующих множественного объекта O_{F1}^8. Так как каждый из выделенных подобъектов зада-

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

ется единственным полным путем подчинения $\overline{h}$, то его суффикс определяет последовательность (маршрут) операций или алгоритмов, или мультимножество товаров. Для конкретных логистических систем можно построить содержательные маршруты, выполняя определенные операции над путями подобъектов.

Если фирма $F2$ осуществляет доставку товаров отечественным потребителям, то множественный логистический объект будет семиуровневым O_{F2}^{7}, со структурой:

$$C(O_{F2}^{7} = \underset{1}{[}\underset{2}{\langle}\underset{3}{[\![} T1_{1j}]\!], \underset{4}{[}\underset{5}{[\![}[\, A_{Y1}^{K} \underset{7}{[}\, A_{Y2}^{T} \underset{9}{[}\, A_{Y3}^{T} \underset{11}{[}\, A_{Y4}^{T}]\cdot$$

$$\cdot \underset{12}{[}\, \Upsilon_4]] \cdot \underset{10}{[}\, \Upsilon_3]] \cdot \underset{8}{[}\, \Upsilon_2]] \cdot \underset{6}{[}\, \Upsilon_1]]\!]_{K1_1},$$

$$[\![\,]\!]_{K1_2}, \dots, [\![\,]\!]_{K1_{k1}}]\rangle, \langle C1_2 \rangle, \dots, \langle C1_{m1} \rangle]. \qquad (15)$$

Реорганизация фирм $F1$ и $F2$ или их слияние может быть формально проведена на моделях множественных объектов и их структур (14), (15) с помощью рассмотренных операций над объектами.

Научная новизна и практическая значимость

В работе исследованы свойства и характеристики компонент гибридных множественных объектов сложных систем, предложены оценки их сложности, приведены правила выполнения внутренних и внешних операций на объектах. Введены отношения произвольного порядка над множественными объектами, определено понятие функции и отображения на объектах множественной структуры.

В статье рассмотрены вопросы развития множественной структуры, порождающей множественные объекты.

Переход от абстрактной множественной структуры к предметной структуре требует трансформации системы и множественных объектов. Трансформация предполагает три последовательных этапа: спецификацию, или же привязку к предметной области; интерпретацию, т.е. представление в форме множественного объекта, и конкретизацию путем формирования цели. Предложенный подход описания систем, на основе гибридных множеств, может быть использован во многих прикладных системах для структурного и содержательного анализа.

Выводы

Существующее многообразие и разнородность предметных систем натолкнуло нас на разработку модели, обобщающую классические множества и их развитие – множества множеств. Идеи представления и конструирования множественных объектов систем были предложены в докладе [4].

Множественные объекты, в отличие от множеств, конструируются множественной структурой и сами представляются структурой и содержанием, поэтому операции над такими объектами выполняются нетрадиционно и требуют дальнейшего развития в прикладных системах.

Переход от абстрактной множественной структуры к предметной структуре требует трансформации системы и множественных объектов. Трансформация предполагает три последовательных этапа: спецификацию (привязку к предметной области), интерпретацию (множественных объектов) и конкретизацию (цели).

Предложенный подход описания систем, на основе гибридных множеств, может быть использован во многих прикладных системах для структурного и содержательного анализа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Босов, А. А. Підвищення ефективності роботи транспортної системи на основі структурного аналізу / А. А. Босов, Н. А. Мухіна, Б. П. Піх. – Дніпропетровськ : Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2005. – 200 с.
2. Босов, А. А. Структурная сложность систем / А. А. Босов, В. М. Ильман // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпропетровськ, 2012. – Вип. 40. – С. 173–179.
3. Босов, А. А. Функции множеств и их приложение : монография / А. А. Босов. – Днепродзержинск : Андрей, 2007. – 182 с.
4. Ильман, В. М. Атрибутивные множественные объекты / В. М. Ильман, С. П. Самойлов // Соврем. информ. технологии на трансп., в промсти и образовании : тез. VII междун. науч.-практ. конф. (18.04-19.04.2013) / Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпропетровськ, 2013. – С. 64–65.
5. Ільман, В. М. Конструктивне представлення множинних об’єктів та їх властивості [Элек-

doi: 10.15802/stp2015/46075

тронный ресурс] : [препринт] / В. М. Ільман, В. И. Шинкаренко // Проблеми програмування. – 2014. – № 1. – Режим доступа: http://ead-nurt.diit.edu.ua/jspui/handle/123456789/3209. – Загл. с экрана. – Проверено : 12.05.2015.
6. Ільман, В. М. Формальні структури та їх застосування : монографія / В. М. Ільман, В. В. Скалозуб, В. І. Шинкаренко. – Дніпропетровськ : Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна, 2009. – 205 с.
7. Касти, Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы : пер. с англ. / Дж. Касти. – Москва : Мир, 1982. – 216 с.
8. Курош, А. Г. Лекции по общей алгебре / А. Г. Курош. – Москва : Физматлит, 1973. – 162 с.
9. Месарович, М. Общая теория систем: математические основы / М. Месарович, Я. Такахара. – Москва : Мир, 1978. – 311 с.
10. Молчанов, А. А. Моделирование и проектирование сложных систем / А. А. Молчанов. – Київ : Вища шк., 1988. – 359 с.
11. Ногин, В. Д. Принятие решений при многих критериях : учеб.-метод. пособие / В. Д. Ногин. – Санкт-Петербург : ЮТАС, 2007. – 104 с.
12. Орловский, П. Н. Системный анализ проблем транспортных узлов / П. Н. Орловский, Г. П. Скворцов. – Київ : Основа, 2007. – 596 с.
13. Саати, Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий : пер. с англ. / Т. Саати. – Москва : Радио и связь, 1993. – 278 с.
14. Скорняков, Л. А. Элементы теории структур / Л. А. Скорняков. – 2-е изд., доп. – Москва : Наука, 1982. – 160 с.
15. Халіпова, Н. В. Моделювання взаємодії колії та рухомого складу / Н. В. Халіпова // Наука та прогрес трансп. Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту залізн. трансп. – 2013. – № 5 (47). – С. 58–69. doi: 10.15802/stp2013/17967.
16. Халипова, Н. В. Обоснование применения дискретного принципа максимума в методе фаз при проектировании логистических систем доставки грузов [Электронный ресурс] / Н. В. Халипова // Universum : Техн. науки. – 2015. –№ 1 (14). – Режим доступа: http://7universum.com/ ru/tech/archive/item/1891. – Загл. с экрана. – Проверено : 13.05.2015.
17. Халипова, Н. В. Оценка эффективности функционирования международных логистических систем / Н. В. Халипова // Техн. науки – от теории к практике : сб. ст. по материалам XXXVI междунар. науч.-практ. конф. / СибАК – Новосибирск, 2014. – № 7 (32). – С. 99–115.
18. Хаусдорф, Ф. Теория множеств / Ф. Хаусдорф. – Москва ; Ленинград : ОНТИ, 1937. – 306 с.
19. Шинкаренко, В. И. Конструктивно-продукционные структуры и их грамматические интерпретации. I. Обобщенная формальная конструктивно-продукционная структура / В. И. Шинкаренко, В. М. Ильман // Кибернетика и систем. анализ. – 2014. – Т. 50, № 5. – С. 8–16.
20. An Overview of the Applications of Multiset / D. Singh, A. M. Ibrahim, T. Yohanna, J. Singh // Novi Sad J. of Mathematics. – 2007. – Vol. 37, № 2. – P. 73–92.
21. Atkin, R. H. Mathematical structure in human affairs / R. H. Atkin. – London : Heinemann, 1974. – 212 p.
22. Blizard, W. The Development of Multiset Theory / W. Blizard // Notre Dame J. of Formal Logic. – 1989. – Vol. 30, № 1. – P. 36–66.
23. Syropoulos, A. Mathematic of Multisets / A. Syropoulos // Multiset Processing. Lecture Notes in Computing Science. – 2001. – Vol. 2235. – P. 347–358. doi: 10.1007/3-540-45523-X_17.

А. А. БОСОВ[1], В. М. ІЛЬМАН[2], Н. В. ХАЛІПОВА[3*]

[1]Каф. «Прикладна математика», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел./факс +38 (056) 373 15 36, ел. пошта AABosov@i.ua, ORCID 0000-0002-5348-2205
[2]Каф. «Комп'ютерні інформаційні технології», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел./факс +38 (056) 373 15 35, ORCID 0000-0003-0983-8611
3[*]Каф. «Транспортні системи та технології», Університет митної справи та фінансів, вул. Дзержинського, 2/4, Дніпропетровськ, Україна, 49000, тел. +38 (056) 46 95 98, e-mail khalipov@rambler.ru, ORCID 0000-0001-5605-6781

МНОЖИННІ ОБ'ЄКТИ

Мета. Розвиток складних технологій виробничих й управлінських процесів, систем інформатики, прикладних об'єктів теорії систем та ін. вимагає вдосконалення математичних методів, нових підходів для досліджень прикладних систем. А різноманіття й різнорідність предметних систем потребує розробки моделі, що узагальнює класичні множини та їх розвиток – множини множин. Множинні об'єкти, на відміну від

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

множин, конструюються множинною структурою й самі представляються структурою та змістом. Метою роботи є аналіз множинної структури, що породжує множинні об'єкти, подальший розвиток операцій над такими об'єктами в прикладних системах. **Методика.** Для досягнення цілей дослідження множинна структура об'єктів представляється конструктивною трійкою, що складається з носія, сигнатури й аксіоматики. Множинний об'єкт визначається структурою й змістом, а також представляється гібридною суперпозицією, складеною з множин, мультимножин, упорядкованих множин (списків) та неоднорідних множин (послідовностей, кортежів). **Результати.** У роботі розглянуті властивості й характеристики компонентів гібридних множинних об'єктів складних систем, запропоновані оцінки їх складності, наведені правила виконання внутрішніх і зовнішніх операцій на об'єктах. Уведено відносини довільного порядку над множинними об'єктами, визначене поняття функції й відображення на об'єктах множинної структури. **Наукова новизна.** У даній роботі розглянуті питання розвитку множинної структури, що породжує множинні об'єкти. **Практична значимість.** Перехід від абстрактної множинної структури до предметної структури вимагає трансформації системи й множинних об'єктів. Трансформація припускає три послідовних етапи: специфікацію (прив'язку до предметної області), інтерпретацію (множинних об'єктів) і конкретизацію (мети). Запропонований підхід опису систем, на основі гібридних множин, може бути використаний у багатьох прикладних системах для структурного й змістовного аналізу. Наведено приклад застосування гібридних множин для моделювання логістичних систем.

Ключові слова: конструктивна множинна структура; гібридні множинні об'єкти; моделювання; складні системи; множини; списки; мультимножини; кортежі; логістична система

A. A. BOSOV[1], V. M. ILMAN[2], N. V. KHALIPOVA[3*]

[1]Dep. «Applied Mathematics», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel./fax +38 (056) 373 15 36, e-mail AABosov@i.ua, ORCID 0000-0002-5348-2205

[2]Dep. «Computer Information Technologies», Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan, Lazaryan St., 2, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel./fax +38 (056) 373 15 35, ORCID 0000-0003-0983-8611

[3*]Dep. «Transport Systems and Technologies», Academy of Customs Service of Ukraine, Dzerzhynskyi St., 2/4, Dnipropetrovsk, Ukraine, 49000, tel. +38 (056) 46 95 98, e-mail khalipov@rambler.ru, ORCID 0000-0001-5605-6781

MULTIPLE OBJECTS

Purpose. The development of complicated techniques of production and management processes, information systems, computer science, applied objects of systems theory and others requires improvement of mathematical methods, new approaches for researches of application systems. And the variety and diversity of subject systems makes necessary the development of a model that generalizes the classical sets and their development – sets of sets. Multiple objects unlike sets are constructed by multiple structures and represented by the structure and content. The aim of the work is the analysis of multiple structures, generating multiple objects, the further development of operations on these objects in application systems. **Methodology.** To achieve the objectives of the researches, the structure of multiple objects represents as constructive trio, consisting of media, signatures and axiomatic. Multiple object is determined by the structure and content, as well as represented by hybrid superposition, composed of sets, multi-sets, ordered sets (lists) and heterogeneous sets (sequences, corteges). **Findings.** In this paper we study the properties and characteristics of the components of hybrid multiple objects of complex systems, proposed assessments of their complexity, shown the rules of internal and external operations on objects of implementation. We introduce the relation of arbitrary order over multiple objects, we define the description of functions and display on objects of multiple structures. **Originality.** In this paper we consider the development of multiple structures, generating multiple objects. **Practical value.** The transition from the abstract to the subject of multiple structures requires the transformation of the system and multiple objects. Transformation involves three successive stages: specification (binding to the domain), interpretation (multiple sites) and particularization (goals). The proposed describe systems approach based on hybrid sets can be used in many application systems for structural and content analysis. An example of the use the hybrid sets for logistics systems modeling is shown.

Keywords: constructive multiple structure; hybrid multiple objects; modelling; complex systems; sets; lists; multi-sets; tuples; logistics system

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського
національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

REFERENCES

1. Bosov A.A., Mukhina N.A., Pikh B.P. *Pidvyshchennia efektyvnosti roboty transportnoi systemy na osnovi strukturnoho analizu* [Improving the efficiency of the transport system based on structural analysis]. Dnipropetrovsk, DNURT Publ., 2005. 200 p.
2. Bosov A.A., Ilman V.M. Strukturnaya slozhnost sistem [Structural complexity of systems]. *Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu imeni akademika V. Lazariana* [Bulletin of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport named after Academician V. Lazaryan], 2012, issue 40, pp. 173-179.
3. Bosov A.A. *Funktsii mnozhestv i ikh prilozheniye* [Set functions and their application]. Dneprodzerzhinsk, Andrey Publ., 2007. 182 p.
4. Ilman V.M., Samoylov S.P. Atributivnyye mnozhestvennyye obekty [Attribute multiple objects]. *Tezisy VII mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Sovremennye informatsionnye tekhnologii na transporte, v promyshlennosti i obrazovanii (18.04-19.04.2013)»* [Proc. of . the VIIth Int. Scientific and Practical. Conf. «Contemporary Information Technologies at Transport, Industry and Education»]. Dnipropetrovsk, 2013, pp. 64-65.
5. Ilman V.M., Shynkarenko V.Y. Konstruktyvne predstavlennia mnozhynnykh obiektiv ta yikh vlastyvosti [Constructive presentation of multiple objects and their properties]. *Problemy prohramuvannia – Programming Problems,* 2014, no. 1. Available at: http://eadnurt.diit.edu.ua/jspui/handle/12345 6789/3209 (Accessed 12 May 2015).
6. Ilman V.M., Skalozub V.V., Shynkarenko V.I. *Formalni struktury ta yikh zastosuvannia* [Formal structures and their applications]. Dnipropetrovsk, DNURT Publ., 2009. 205 p.
7. Kasti Dzh. *Bolshiye sistemy. Svyaznost, slozhnost i katastrofy* [Large systems. Connectivity, complexity and disasters]. Moscow, Mir Publ., 1982. 216 p.
8. Kurosh A.G. *Lektsii po obshchey algebre* [Lectures on General Algebra]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1973. 162 p.
9. Mesarovich M., Takakhara Ya. *Obshchaya teoriya sistem: matematicheskiye osnovy* [General Systems Theory: mathematical foundations]. Moscow, Mir Publ., 1978. 311 p.
10. Molchanov A.A. *Modelirovaniye i proyektirovaniye slozhnykh sistem* [Modeling and design of complex systems]. Kyiv, Vishcha shkola Publ., 1988. 359 p.
11. Nogin V.D. *Prinyatiye resheniy pri mnogikh kriteriyakh* [Decision-making in many criteria]. Saint-Petersburg, YuTAS Publ., 2007. 104 p.
12. Orlovskiy P.N., Skvortsov G.P. *Sistemnyy analiz problem transportnykh uzlov* [System analysis of the transport junctions problems]. Kyiv, Osnova Publ., 2007. 596 p.
13. Saati T. *Prinyatiye resheniy. Metod analiza ierarkhiy* [Making decisions. The hierarchy's analysis method]. Moscow, Radio i svyaz Publ., 1993. 278 p.
14. Skornyakov L.A. Elementy teorii struktur [Elements of structures theory]. Moscow, Nauka Publ., 1982. 160 p.
15. Khalipova N.V. Modeliuvannia vzaiemodii kolii ta rukhomoho skladu [Modeling of the track and rolling stock interaction]. *Nauka ta prohres transportu. Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu – Science and Transport Progress. Bulletin of Dnipropetrovsk National University of Railway Transport,* 2013, no. 5 (47), pp. 58-69. doi: 10.15802/stp2013/17967.
16. Khalipova N.V. Obosnovaniye primeneniya diskretnogo printsipa maksimuma v metode faz pri proektirovanii logisticheskikh sistem dostavki gruzov [Use justification of a discrete maximum principle method for the design phase of logistic systems delivery]. *Universum: Tekhnicheskiye nauki – Universum: Technical sciences,* 2015, no. 1 (14). Available at: http://7universum.com/ ru/tech/archive/item/1891 (Accessed 13 May 2015).
17. Khalipova N.V. Otsenka effektivnosti funktsionirovaniya mezhdunarodnykh logisticheskikh system [Evaluating the effectiveness of the international logistics systems]. *Sbornik statey po materialam XXXVI mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Tekhnicheskiye nauki – ot teorii k praktike»* [Proc. of the XXXVIth Int. Scientific and Practical. Conf. «Technical Science – From Theory to Practise»]. Novosibirsk, 2014, no. 7 (32), pp. 99-115.
18. Khausdorf F. *Teoriya mnozhestv* [Set Theory]. Moscow, Leningrad, ONTI Publ., 1937. 306 p.
19. Shinkarenko V.I., Ilman V.M. Konstruktivno-produktsionnyye struktury i ikh grammaticheskiye interpretatsii. I. Obobshchennaya formalnaya konstruktivno-produktsionnaya struktura [Structurally-productions structure and their grammatical interpretation. I. Generalized formal design and production structure]. *Kibernetika i sistemny analiz – Cybernetics and Systems Analysis,* 2014, vol. 50, no. 5, pp. 8-16.

doi: 10.15802/stp2015/46075

ISSN 2307–3489 (Print), ISSN 2307–6666 (Online)

Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського
національного університету залізничного транспорту, 2015, № 3 (57)

20. Singh D., Ibrahim A.M, Yohanna T, Singh J. An Overview of the Applications of Multiset. *Novi Sad Journal of Mathematics,* 2007, vol. 37, no. 2, pp. 73-92.
21. Atkin R.H. Mathematical structure in human affairs. London, Heinemann Publ., 1974. 212 p.
22. Blizard W. The Development of Multiset Theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 1989, vol. 30, no. 1, pp. 36-66.
23. Syropoulos A. Mathematic of Multisets. Multiset Processing. *Lecture Notes in Computing Science,* 2001, vol. 2235, pp. 347-358. doi: 10.1007/3-540-45523-X_17.

Стаття рекомендована до друку д.т.н., проф. Б. И. Морозом (Україна); д.фіз-мат.н., проф. С. О. Пічуговим (Україна) .

Надійшла до редколегії 21.01.2015
Прийнята до друку 15.04.2015

doi: 10.15802/stp2015/46075