УДК 621.01 : 531

П. В. ДЯЧЕНКО (Черкаський державний технологічний університет)

МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ПІДШИПНИКІВ КОЧЕННЯ НА ДЕМПФУВАННЯ КОЛИВАНЬ У ЗАЧЕПЛЕННІ ЗУБЧАСТИХ КОЛІС

На основі динамічної схеми зубчастого зачеплення створено математичну модель дослідження впливу конструкційних параметрів підшипників опор, таких як коефіцієнт тертя, приведені маси та жорсткості, на демпфування коливань у зубчастій передачі. Розв'язок моделі отримується з використанням імітаційного моделювання у середовищі Simulink, з контролем достовірності результатів у системі MathCad. Наводяться осцилограми досліджуваних коливань та висновки на основі їх аналізу.

Ключові слова: динамічна схема зубчастого зачеплення, конструкційні параметри підшипників опор, підшипник кочення, демпфування коливань, імітаційне моделювання, Simulink, MathCad

На основе динамической схемы зубчатого зацепления создана математическая модель исследования влияния конструкционных параметров подшипников опор, таких как коэффициент трения, приведенные массы и жесткости, на демпфирование колебаний в зубчатой передаче. Решение модели получено с использованием имитационного моделирования в среде Simulink, с контролем достоверности результатов в системе MathCad. Приводятся осциллограммы исследуемых колебаний и выводы на основе их анализа.

Ключевые слова: динамическая схема зубчатого зацепления, конструкционные параметры подшипников опор, подшипник качения, имитационное моделирование, Simulink, MathCad

On the base of dynamic scheme of toothing, a mathematical model for study of the influence of constructive parameters of radial bearings such as a factor of friction, reduced masses and stiffnesses on damping the vibrations in gearing is developed. The solution for the model is obtained using a simulation modeling in the Simulink environment with checking the validity of results in the system MathCad. The oscillograms of the vibrations under investigation and the conclusions on the base of their analysis are presented.

Keywords: dynamic scheme of toothing, constructive parameters of radial bearings, antifriction bearing, simulation modeling, Simulink, MathCad

Постановка проблеми

У зубчастих передачах, що належать до класу складних технічних систем, основним і найбільш відповідальним вузлом є кінематична пара з ділянками валів, що обертаються на опорах з зосередженими або розподіленими масами різного функціонального призначення, в залежності від типу зубчастої передачі.

Точність, динамічна навантаженість, ресурс, продуктивність, надійність зубчастих передач, перш за все залежить від рівня коливань валів і динамічних зусиль на опорах. При цьому опорні підшипники кочення або ковзання є найбільш інформативним елементом, що сприймає весь спектр коливального процесу і технічного стану зубчастої передачі.

Розробка математичних моделей дослідження впливу підшипників кочення на демпфування коливань у зубчастій передачі вимагає врахування специфічних особливостей і сучасних тенденцій розвитку засобів комп'ютерного моделювання та класифікації зубчастих передач за частотним діапазоном.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

При традиційному дослідженні динаміки зубчастих передач основна увага приділяється

визначенню амплітуд коливань зубчастих коліс, однак найбільший практичний інтерес являють динамічні навантаження на опорах. Опори з підшипниками кочення або ковзання здійснюють додатковий вплив на коливання зубчастих коліс [1, 2], зокрема, самі підшипники кочення є джерелами вібрацій і шуму. Коливання підшипників кочення виникають у результаті відхилення форми доріжок і тіл кочення. Відхилення форм кілець і тіл кочення підшипників впливають на довжину хвилі, а відповідно і на частоту коливань. При цьому розрізняють [2]:

- коливання великої довжини хвилі (до 10-ти коливань за один оберт внутрішнього кільця), із-за ексцентриситету у посадці внутрішнього кільця на вал ротора, з частотою коливань, що дорівнює частоті обертів радіального биття кілець, з амплітудою до 15 мкм;
- коливання середньої довжини хвилі (10...60 коливань за один оберт внутрішнього кільця), із-за хвилястості доріжок кочення, з амплітудою ~ 1 мкм;
- коливання з малою довжиною хвилі (більше 60-ти коливань за один оберт внутрішнього кільця), із-за впливу мікронерівностей з амплітудою ~ 0.1 мкм.

Вплив коливань зовнішнього кільця підшипника, головним чином викликане циклічною зміною його навантаження. У зв'язку з наявністю пружних властивостей і зміни жорсткості підшипників кочення при обертанні, їх резонансні частоти лежать в області 1...100 Гц [3]. Вимірювання вібрацій підшипників зазвичай виконують у радіальному напрямі, при непорушному зовнішньому кільці, і внутрішньому, що обертається.

Дослідження підшипників кочення в якості опор валів зубчастих передач показало [3], що частота основного резонансу валу лежить в межах 200...800 Гц, а спектр вібрацій підшипника значно ширший – 20 Гц...10 кГц. Експериментальні дані показують [3], що максимум інтенсивності частот спектрів підшипників зосереджено у діапазонах частот 600...700, 1400...1500, 7200 Гц. Найбільше зниження вібрацій відбувається для високочастотної складової спектру 400...900 Гц. Спектр частот у низькочастотній області у межах 50...150 Гц майже однаковий для всіх підшипників. Таке протікання динамічного процесу дало змогу визначити методику виявлення дефектів підшипників кочення у системі при занижених швидкостях обертання і виявити частоти, викликані дефектами у дорезонансній зоні з наступним їх аналізом.

Метою стати є дослідження динамічного стану зубчастого зачеплення, в залежності від масо-жорсткісних та демпфуючих параметрів підшипників опор, та виявлення найбільш несприятливих режимів його роботи.

Основна частина

На рис. 1.1 обертальна система пари зубчастих коліс подана у вигляді мас m_1 , m_2 , що рухаються поступально на жорсткостях зачеплення C_1 , C_2 і опор C. Дану схему можна подати у вигляді еквівалентної схеми (рис. 1.2), де приведена маса частин підшипника m_{2np} , що обертаються, і приведена маса шестерні m_{1np} здійснюють коливання відносно нерухомого перерізу, що проходить через вузол коливань a, зображений на схемі рис. 1.1.



Рис. 1. Динамічна схема зубчастого зачеплення з урахуванням піддатливості опор: 1) основна схема, 2) еквівалентна схема

Наведена схема дозволяє розглядати коливальний процес зубчастої передачі у вигляді коливань механічного демпфера, у якому функцію демпфуючого елемента виконує сам підшипник. Диференціальні рівняння, що описують коливальний процес, мають вигляд:

$$n_{1np}\ddot{z}_1 + C_3(t)z_1 + C_{np}(z_1 - z_2) + h_1\dot{z}_1 + h_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) = F(t);$$

$$m_{2\mathbf{n}\mathbf{p}}\ddot{z}_2 + C_{\mathbf{n}\mathbf{p}}(z_2 - z_1) + h_1\dot{z}_1 + h_2(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) = 0.$$
(1)

Прийняті позначення:

 C_1, C_2 – лінійні жорсткості зубців першого і другого коліс, що залежать від їх крутильної жорсткості k_1, k_2 ;

 $C_3 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ – приведена жорсткість зачеп-

лення, що є періодичною функцією часу або

кута повороту $C_3 = C_3(t)$ або $C_3 = C_3(\phi)$. Змінну жорсткість зачеплення можна подати на схемі у вигляді декількох пружин (особливо для косозубого зачеплення), пар зубців, що послідовно вступають у зачеплення при поступальному переміщенні основи;

С_{пр} – приведена жорсткість підшипників;

 $F(t) = \sum_{i} F_{i} \sin(\omega_{i}t + \beta_{i})$ – збурююча сила;

*h*₁, *h*₂ – коефіцієнти демпфування у зачепленні й опорах;

*z*₁, *z*₂ – переміщення центрів мас шестерні й підшипника.

За спрощуючих умов, система рівнянь (1) має аналітичний розв'язок, у загальному випадку розв'язок отримується шляхом комп'ютерного моделювання. Такий розгляд підшипника як демпфера, особливо у випадку порожнистих тіл кочення у підшипнику, дає змогу керувати вібраційним процесом і намітити шляхи нормування підшипників залежно від вібраційних режимів.

Для створення електронної моделі розв'язування запишемо систему рівнянь (1) відносно старших похідних \ddot{z}_1 , \ddot{z}_2 :

$$\ddot{z}_{1} = -\frac{h_{1} + h_{2}}{m_{1np}} \dot{z}_{1} + \frac{h_{2}}{m_{1np}} \dot{z}_{2} - \frac{C_{3} + C_{np}}{m_{1np}} z_{1} + \frac{C_{np}}{m_{1np}} z_{2} + \frac{1}{m_{1np}} F(t);$$

$$\ddot{z}_{2} = \frac{h_{2} - h_{1}}{m_{2np}} \dot{z}_{1} - \frac{h_{2}}{m_{2np}} \dot{z}_{2} + \frac{C_{np}}{m_{2np}} z_{1} - \frac{C_{np}}{m_{2np}} z_{2}.$$
(2)

Введемо такі позначення:

$$\frac{C_3}{m_{1np}} = \omega_1^2; \frac{C_{np}}{m_{1np}} = \omega_{1np}^2; \frac{h_1}{m_{1np}} = n_{11}; \frac{h_2}{m_{1np}} = n_{21}; \frac{C_3}{m_{2np}} = \omega_2^2; \frac{C_{np}}{m_{2np}} = \omega_{2np}^2; \frac{h_1}{m_{2np}} = n_{12}; \frac{h_2}{m_{2np}} = n_{22}.$$

Система рівнянь набуває вигляду, зручного для побудови структурної схеми її розв'язування.

$$\ddot{z}_{1} = -(n_{11} + n_{21})\dot{z}_{1} + n_{21}\dot{z}_{2} - (\omega_{1}^{2} + \omega_{1np}^{2})z_{1} + \omega_{1np}^{2}z_{2} + \frac{1}{m_{1np}}F(t);$$

$$\ddot{z}_{2} = -n_{22}\dot{z}_{2} + (n_{22} - n_{12})\dot{z}_{1} + \omega_{2np}^{2}z_{1} - \omega_{2np}^{2}z_{2}.$$
(3)

Завдання на аналогове програмування рішення системи рівнянь (3) передбачає такі початкові дані [6]:

- систему диференціальних рівнянь;
- початкові умови;
- значення постійних коефіцієнтів рівнянь;
- інтервал розв'язку задачі;
- орієнтовні граничні значення змінних для розрахунку масштабів;
- перелік вхідних змінних і бажаний спосіб їх реєстрації;
- додаткові відомості, що випливають зі специфіки задачі і програми передбачуваних досліджень.

Частина вхідних даних може уточнюватись у процесі розв'язування задачі (наприклад, граничні значення змінних, інтервал розв'язку тощо).

Блок-схема розв'язування системи рівнянь (3) будується за правилами, прийнятими у аналоговому моделюванні [6], і зображена на рис. 2. Блоки, що використовуються для її побудови, наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Блок	Призначення блоку		
$\rightarrow k$	– блок множення на постійний коефіцієнт (може бути константа або вираз);		
$\rightarrow -x$	 – зміна знаку вхідної величини на протилежний; 		
$\rightarrow 1/x$	 обчислення оберненої величини; 		
ΞΣ	– суматор вхідних величин;		
→ <u>∫</u>	 інтегратор вхідної величини. 		

Блоки для побудови схеми розв'язування системи рівнянь (3)



Рис. 2. Блок-схема моделювання системи рівнянь (3)

Для переходу до структурної схеми розв'язування системи рівнянь (2) необхідно ввести у розгляд вхідні, вихідні та проміжні параметри моделі. Вхідними параметрами є: h_1 , h_2 , m_{1np} , m_{2np} , C_3 , C_{np} , F(t); вихідними – z_1 , z_2 . Проміжні параметри моделі, точки блок-схеми, у яких вони діють та схеми їх реалізації, наведені у табл. 2. У наведених у таблиці схемах реалізації, крім введених раніше, використовуються блоки: \oplus – додавання, \otimes – множення.

Таблиця 2

Точка схеми	Обчислювальна операція	Схема реалізації		
1	2	3		
1	$-(n_{11}+n_{21})\dot{z}_1 = -\frac{h_1+h_2}{m_{1np}}\dot{z}_1$	$ \begin{array}{c} \dot{z}_{1} \\ \dot{h}_{1} \\ \dot{h}_{2} \\ \end{array} - x \\ \end{array} 1 \\ m_{1np} \\ \end{array} $		
2	$\omega_{1np}^2 z_2 = \frac{C_{np}}{m_{1np}} z_2$	$C_{np} \bullet \qquad $		
3	$-(\omega_1^2 + \omega_{1np}^2)z_1 = -\left(\frac{C_{np}}{m_{1np}} + \frac{C_3}{m_{1np}}\right)z_1$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$		

Обчислювальні операції та схеми їх реалізації



На основі системи рівнянь (2), з використанням функціональних блоків обчислювальних операцій (табл. 2), створюємо структурну схему моделювання цієї системи (рис. 3). Реалізація наведеної на рис. 3. структури може бути здійснена у моделюючому середовищі MatlabSimulink [5]. Створена на її основі імітаційна модель (рис. 4) забезпечує можливість введення числових значень вхідних параметрів; гармонічного та імпульсного збудження коливань у динамічній системі; візуальне спостереження коливань вихідних параметрів за допомогою

віртуального приладу «осцилограф». Відтворення змінної жорсткості зачеплення забезпечується використанням послідовно з'єднаних генератора синусоїдального сигналу та обмежувача амплітуди (рис. 4).



Рис. 3. Структурна схема моделювання системи рівнянь (2)



Рис. 4. Імітаційна модель рішення системи рівнянь (2)

Створена імітаційна модель (рис. 4) доповнюється засобами перевірки її достовірності. Ефективним методом такої перевірки є співставлення отриманих осцилограм коливального процесу, що відбувається при однакових умовах у імітаційній, та створеній окремо, альтернативній їй моделі. У якості альтернативної використовується створена засобами MathCad математична модель, на основі системи рівнянь (2). Для отримання альтернативної моделі необхідно систему двох диференціальних рівнянь другого порядку (2) перетворити на систему чотирьох рівнянь першого порядку. Використовуючи метод заміни змінних [6], введемо для системи рівнянь (2) такі позначення: $z_1 = x_1, \dot{z}_1 = x_2, z_2 = x_3, \dot{z}_2 = x_4$. Система (2) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1} &= x_{2}; \\ \dot{x}_{2} &= -\frac{h_{1} + h_{2}}{m_{1np}} x_{2} + \frac{h_{2}}{m_{1np}} x_{4} - \frac{C_{3} + C_{np}}{m_{1np}} x_{1} + \frac{C_{np}}{m_{1np}} x_{3} + \frac{1}{m_{1np}} F(t); \\ \dot{x}_{3} &= x_{4}; \\ \dot{x}_{4} &= \frac{h_{2} - h_{1}}{m_{2np}} x_{2} - \frac{h_{2}}{m_{2np}} x_{4} + \frac{C_{np}}{m_{2np}} x_{1} - \frac{C_{np}}{m_{2np}} x_{3}. \end{aligned}$$

$$(4)$$

У середовищі MathCad система (4) має вигляд:

$$F(t,x) := \begin{bmatrix} x_2 \\ -(h1+h2)\cdot x_2 + h2\cdot x_4 + (-cz + cpr)\cdot x_1 - cpr\cdot x_3 + f \\ m1 \\ x_4 \\ (h2 - h1)\cdot x_2 - h2\cdot x_4 + cpr\cdot x_1 - cpr\cdot x_3 \\ m2 \end{bmatrix}$$
(5)

Для проведення модельного експерименту задаємось початковими числовими значеннями вхідних параметрів: $h_1 = 1$ н·м·с/рад; $h_2 =$ = 100 н·м·с/рад; m_{1np} = 0,1 кг, m_{2np} = 1,8 кг, $C_{_3}$ = 15000 н·м/рад; C_{np} = 80000 н∙м/рад; F(t) = 10 н. Для отримання розв'язку системи (5) у MathCad використовуємо вбудовану функцію *rkfixed*(x, t1, t2, n, F), параметрами якої є: x -ім'я змінної системи рівнянь; t1 = 0, t2 = 2 - 1часовий інтервал розв'язку системи рівнянь; n = 50000 - кількість точок розв'язку; <math>F - i M' яфункції, визначеної користувачем. Розв'язок системи відшукується при нульових початкових умовах, для цього у MathCad задається вектор початкових значень змінних x = (0, 0, 0, 0).

Метою проведення модельного експерименту є встановлення закономірності впливу конструкційних параметрів підшипника (m_{2np} , h_2 , C_{np}) на демпфування коливань у зубчастій передачі. Суть експерименту полягає у тому, що змінюючи значення конструкційних параметрів підшипника (кожного окремо, при решті незмінних), фіксується значення коефіцієнта динамічності K_{π} коливного перехідного процесу зміни вихідної величини z_2 . Коефіцієнт динамічності K_{μ} визначається з виразу $K_{\mu} = A_{\text{max}}/A_{\text{уст}}$, де A_{max} – максимальне значення переміщення центру мас шестерні, $A_{\text{уст}}$ – його усталеного значення. У процесі проведення модельного експерименту числові значення вхідних параметрів будемо змінювати у межах ± 100 % від початкових, з кроком $\Delta = 10$ %. Отримані осцилограми коливань зубчастої передачі наведені на рис. 5.

Висновки

1. Осцилограми коливань центрів мас елементів зубчастої передачі, отримані на імітаційній Simulink-моделі, повністю ідентичні відповідним графікам, отриманим у системі MathCad, що підтверджує достовірність створених моделей.

2. Відношення амплітуд коливань центрів мас колеса і підшипника для всіх режимів складає $z_2/z_1 = 0.004/0,00075 \approx 5.3$.

3. Частота коливань зубчастого колеса залежить тільки від масо-жорсткісних параметрів самого колеса. Зміна конструкційних параметрів підшипника на частоту коливань колеса не впливає.





4. Аналіз осцилограм 1 – 9 (рис. 5.) вказує на те, що:

- збільшення значення коефіцієнта демпфування підшипника h_2 призводить до зменшення коефіцієнта динамічності коливань зубчастого колеса (осц. 3, рис. 5), що відповідає зменшенню часу затухання коливань. При збільшенні h_2 удвічі, від 100 до 200 (осц. 2, 3, рис. 5), зменшення коефіцієнта динамічності складає – $K_{\rm A} = 0,003/0,0012 = 2,5$ рази. Відповідно час затухання коливного процесу зменшився у $2/1,5 \approx 3$ рази (осц. 2, 3, рис. 5). При змінюванні значення h_2 у широких межах, можна виділити ділянки нестійкого, коливального та стійкого (аперіодичного) режиму роботи зубчастого

зачеплення. Вказані ділянки позначені відповідно як 1, 2, 3 на графіках (рис. 6). Залежність коефіцієнта динаміки K_{α} від параметра h_2 , границі ділянок режимів роботи зубчастої передачі, та відповідні їм значення K_{α} і h_2 відображені у табл. 3 та проілюстровані графіком 1 (рис. 6);

- збільшення приведеної маси підшипника m_{2np}, веде до збільшення значення коефіцієнта динамічності коливань зубчастого колеса (осц. 4, 5, 6, рис. 5), відповідно збільшується і час затухання коливного процесу. Збільшення значення параметра m_{2np} вдвічі викликає збільшення коефіцієнта динамічності у ~ 1,1 разів. При зменшенні m_{2np} до нуля стійкого режиму роботи зубчастої передачі не спостерігається (графік 2, рис. 6.);

збільшення приведеної жорсткості підшипника С_{пр} призводить до збільшення коефіцієнта динамічності коливань зубчастого колеса (осц. 7, 8, 9, рис. 5). При збільшенні С_{пр} удвічі зростання К_д складає

 $0,003/0,0023 \approx 1,3$ рази (осц. 7, 8, рис. 5). Графік залежності $K_{\rm d}(C_{\rm np})$ наведено на рис. 6.3. Дані розподілу значень $C_{\rm np}$ між ділянками режимів роботи зубчастої передачі, його граничні значення, та відповідні значення $K_{\rm d}$ зведені у табл. 3.

Таблиця 3

підшипника	Режим роботи зубчастого зачеплення та відповідне йому значення параметра			
h_2	Стійкий	Коливальний	Нестійкий	
	≥ 300	30052	< 52	
	Значення коефіцієнта динамічності – К _д			
	$< 8.10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4} \dots 3, 5 \cdot 10^{-4}$	>3,5.10-4	
m _{2np}		< 5	\geq 5	
		< 0,032	\geq 0,032	
C_{np}	< 50	5011500	≥ 11500	
	$< 5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3} \dots 4 \cdot 10^{-2}$	\geq 0,04	
	$ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	0.06 0.04 1 3 0.02 0.04 3 0.02 0.04 1 3 0.02 0.04 1 0.05 0.04 1 0.05 0.05 0.05 1 0.05 0.05 0.05 0.05	2 1 2 1 1 00 400 600 800 100 11500 Cpr 3)	

Залежність режиму роботи зубчастої передачі від параметрів підшипника

Рис. 6. Залежність коефіцієнта динамічності від зміни параметрів підшипника: 1 – від коефіцієнта демпфування $K_{\rm A}(h_2)$; 2 – від маси $K_{\rm A}(m_{2\rm mp})$; 3 – від жорсткості $K_{\rm A}(C_{\rm mp})$

5. Залежності $K_{\rm d}(h_2), K_{\rm d}(m_{2{\rm up}})$ є нелінійними,

 $K_{\rm A}(C_{\rm np})$ – лінійною.

6. Оптимальними, у розумінні найсприятливішого режиму роботи зубчастої передачі, що відповідає ділянці 3 (рис. 6), є такі співвідношення параметрів зубчастого колеса та підшипника: $h_1/h_2 = 1/300 = 0,0033$, $m_{1np}/m_{2np} = 0,1/5 = 0,02$, $C_3/C_{np} = 15000/50 = 300$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

- Абрамов, Б. М. Колебания прямозубых зубчатых колес [Текст] / Б. М. Абрамов. Х.: ХГУ, 1968. – 175 с.
- Генкин, М. Д. Виброакустическая диагностика машин и механизмов [Текст] / М. Д. Генкин, А. Г. Соколова. – М.. Машиностроение, 1987. – 288 с.

- Галахов, М. А. Динамика шарикового подшипника при радиальной нагрузке [Текст] / М. А. Галахов, В. К. Коршунов // Изв. ВУЗов. Машиностроение. – 1979. – № 8. – С. 12-16.
- Дьяконов, В. П. Справочник по MathCad PLUS 7.0 PRO. Универсальная система математических расчетов [Текст] / В. П. Дьяконов. – М., 1998.
- Гультяев, А. Имитационное моделирование в среде MATLAB-5.2. Практическое пособие [Текст] / А. Гультяев. – СПб.: Корона принт, 1999. – 288 с.
- Виттенберг, И. М. Программирование аналогоцифровых вычислительных систем [Текст] : справочник / И. М. Витенберг, М. Г. Левин, И. Я. Шор; под ред. И. М. Витенберга. – М.: Радио и связь, 1989. – 288 с.

Надійшла до редколегії 09.11.2010. Прийнята до друку 24.11.2010.